ODWZOROWANIA TYPU PASCAL FINITE I HIPOTEZA JAKOBIANOWA

Elżbieta Adamus
Akademia Górniczo-Hutnicza im. Stanisława Staszica w Krakowie
esowa@agh.edu.pl

Niech k będzie ciałem algebraicznie domkniętym charakterystyki zero. Niech $F = (F_1, \ldots, F_n) : k^n \to k^n$ będzie odwzorowaniem wielomianowym i niech J_F oznacza macierz Jacobiego odwzorowania F. Hipoteza Jakobianowa mówi, że jeżeli $\det J_F = \text{const} \neq 0$, to F jest globalnie odwracalne i odwzorowanie odwrotne również jest wielomianowe.

Celem referatu jest zaprezentowanie algorytmu, który dla zadanego automorfizmu wielomianowego konstruuje odwzorowanie odwrotne. Mając dane odwzorowanie wielomianowe $F \in K[X]^n$ definiujemy endomorfizm σ_F dany wzorem $\sigma_F(P) = P \circ F$, dla dowolnego $P \in K[X]^n$. Ponadto definiujemy σ_F-derywację Δ_F na $K[X]^n$ kładąc $\Delta_F(P) = \sigma_F(P) - P$. Konstruujemy ciąg odwzorowań wielomianowych $\{P_k\}$, gdzie $P_k \in K[X]^n$ jest postaci $P_k = \Delta_F^k(Id)$. Wyróżniamy klasę odwzorowań wielomianowych typu *Pascal finite*, dla których algorytm się zatrzymuje, to znaczy istnieje $m \in \mathbb{N}$ takie, że $P_m = 0$.

Podajemy równoważną wypowiedź Hipotezy Jakobianowej przy użyciu opisanego algorytmu, jak również formułę na odwzorowanie odwrotne do zadanego automorfizmu wielomianowego, wykorzystującą skończoną liczbę wyrazów ciągu $\{P_k\}$.

[1] E. Adamus, P. Bogdan, T. Crespo and Z. Hajto, *An effective study of polynomial maps*, Journal of Algebra and Its Applications, **Vol. 16, No. 5** (2017).

[2] E. Adamus, P. Bogdan, Z. Hajto, *An effective approach to Picard-Vessiot theory and the Jacobian Conjecture*, preprint (w recenzji) [arXiv:1506.01662].

O DZIAŁANIACH GRUP SKOŃCZONYCH NA PRZESTRZENIACH TOPOLOGICZNYCH, W KTÓRYCH KAŻDY ELEMENT GRUPY MA PUNKT STAŁY

Czesław Bagiński
Politechnika Białostocka
c.baginski@pb.edu.pl

Działanie skończonej grupy G homeomorfizmów zwartej przestrzeni topologicznej X na X nazywamy działaniem typu gpnf (*Gilman purely non-freely*), jeśli każdy element grupy G ma punkt stały. Dowodzimy, że dla każdej grupy G istnieje zwarta powierzchnia X, na której działanie G jest typu gpnf. Dla grup abelowych wyznaczamy minimalny rodzaj powierzchni z działaniem typu gpnf, co jest równoznaczne z określeniem minimalnej liczby cyklicznych podgrup pokrywających G. Dla grup nieabelowych problem sprowadza się do wyznaczenia minimalnej liczby podgrup cyklicznych, które pokrywają G wraz ze swoimi sprzężeniami. Przedstawiamy charakteryzację takich grup, gdy liczba takich cyklicznych podgrup nie przekracza trzech.

Prezentowane wyniki zostały uzyskane we współpracy z G. Gromadzkim (Uniwersytet Gdański) i R. Hidalgo (Universidad de La Frontera, Chile). Badania zostały zrealizowane w ramach grantu NCN 2015/17/B/ST1/03235 oraz pracy S/WI/1/2014 (Politechnika Białostocka) i sfinansowanej ze środków na naukę MNiSW.

WSPÓŁMIERNOŚĆ W GRUPACH MORDELLA-WEILA ROZMAITOŚCI ABELOWYCH I TORUSÓW

Dorota Blinkiewicz
Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu
dorota.blinkiewicz@amu.edu.pl

Badanie liniowej zależności punktów w grupach Mordella-Weila zapoczątkował artykuł polskiego matematyka prof. Andrzeja Schinzla z 1975 roku [15]. Podał on lokalne warunki dla badania liniowej zależności punktów na jednowymiarowym torusie. A. Schinzel pokazał również kontrprzykład do tego twierdzenia dla torusa dwuwymiarowego.

Następnie problem badania liniowej zależności punktów w grupach Mordella-Weila torusów i rozmaitości abelowych był zgłębiany przez wielu autorów, były to m.in. następujące prace: [7](1997), [1](1998), [2](2003), [12](2003), [16](2003), [11](2004), [3](2005), [5](2006), [6](2008), [8](2009), [10](2010), [13](2010), [4](2011), [9](2013), [14](2015).

Warto jednak zauważyć, że dotychczas nikt nie badał współmierności podgrup grupy Mordella-Weila poprzez homomorfizmy redukcji oraz w odniesieniu do wspomnianej powyżej liniowej zależności punktów.

W referacie omówimy lokalno-globalne własności współmierności. Zastosujemy otrzymane rezultaty do grup Mordella-Weila rozmaitości abelowych i torusów. Podamy przykłady klas rozmaitości abelowych i torusów, dla których zachodzą lokalno-globalne własności współmierności. W obu przypadkach pokażemy również przykłady klas rozmaitości abelowych i torusów, dla których kryteria te nie są spełnione. Przykłady te prowadzą bezpośrednio do konstrukcji 1-motywów o ciekawych własnościach. Jest to praca wspólna z prof. Grzegorzem Banaszakiem.

[1] G. Banaszak, *Mod p logarithms $log_2 3$ and $log_3 2$ differ for infinitely many primes*, Proceedings of the Second Polish-Czech Conference on Number Theory, Annales Mathematicae Silesianae **12** (1998), 141–148.

[2] G. Banaszak, W. Gajda, P. Krasoń, *A support problem for the intermediate Jacobians of l-adic representations*, Jour. of Number Theory **100** no. 1 (2003), 133–168.

[3] G. Banaszak, W. Gajda, P. Krasoń, *Detecting linear dependence by reduction maps*, Jour. of Number Theory **115** (2005), 322–342.

[4] G. Banaszak, P. Krasoń, *On arithmetic in Mordell-Weil groups*, Acta Arithmetica **150** no. 4 (2011), 315–337.

[5] S. Barańczuk, *On reduction maps and support problem in K-theory and abelian varieties*, Jour. of Number Theory **119** (2006), 1–17.

[6] S. Barańczuk, K. Górnisiewicz, *On reduction maps for the ètale and Quillen K-theory of curves and applications*, J. K-Theory **2** no. 1 (2008), 103–122.

[7] C. Corralez-Rodrigáñez, R. Schoof, *Support problem and its elliptic analogue*, Jour. of Number Theory **64** (1997), 276–290.

[8] W. Gajda, K. Górnisiewicz, *Linear dependence in Mordell-Weil groups*, J. Reine Angew. Math. **630** (2009), 219–233.

[9] P. Jossen, *Detecting linear dependence on a simple abelian variety via reduction maps*, Comment. Math. Helv. **88** (2013), 323–352.

[10] P. Jossen, A. Perucca, *A counterexample to the local-global principle of linear dependence for Abelian varieties*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I **348** no. 1 (2010), 9–10.

[11] C. Khare, D. Prasad, *Reduction of homomorphisms mod p and algebraicity*, Jour. of Number Theory **105** (2004), 322–332.

[12] M. Larsen, *The support problem for abelian varieties*, Jour. of Number Theory **101** (2003), 398–403.

[13] A. Perucca, *On the problem of detecting linear dependence for products of abelian varieties and tori*, Acta Arith. **142** (2010), 119–128.

[14] P. Rzonsowski, *Linear relations and arithmetic on abelian schemes*, Functiones et Approximatio, **52.1** (2015), 83–107.

[15] A. Schinzel, *On power residues and exponential congruences*, Acta Arithmetica **27** (1975), 397–420.

[16] T. Weston, *Kummer theory of abelian varieties and reductions of Mordell-Weil groups*, Acta Arith. **110** (2003), 77–88.

EFEKTYWNE BADANIA AUTOMORFIZMÓW WIELOMIANOWYCH

Paweł Bogdan
Katedra Metod Efektywnych Algebry,
Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Jagiellońskiego
bogdan@ii.uj.edu.pl

Teresa Crespo i Zbigniew Hajto w pracy [4] rozważają odwzorowania wielomianowe o stałym jakobianie

$$F = (F_1, \dots, F_n) \;:\; K^n \to K^n, \tag{1}$$

gdzie n jest liczbą naturalną, a K jest ciałem algebraicznie domkniętym charakterystyki zero. W [4] autorzy podali efektywne kryterium, które pozwala na sprawdzenie, czy zadane odwzorowania wielomianowe są automorfizmami wielomianowymi. W pracy [2] autorzy uprościli kryterium wrońskianowe zaproponowane przez Crespo i Hajto.

Kryterium wrońskianowe bada własności rozszerzenia ciał $K(F_1, \dots, F_n) \subset K(X_1, \dots, X_n)$. Aby go efektywnie użyć, musimy rozstrzygnąć, czy funkcja $P \in K[X_1, \dots, X_n]$ jest jednocześnie elementem ciała $K(F_1, \dots, F_n)$. Możemy to wykazać, korzystając z algorytmu Buchbergera, który wykorzystuje bazy Groebnera. Możemy również zastosować algorytm opisany w [1].

W [1] przedstawione są własności wspomnianego algorytmu, przykłady wykorzystania i uzasadnienie poprawności. W artykule [3] skupiono się na technicznych aspektach związanych z algorytmem. Podaje się jego implementację, opisuje, jak komputer może operować na wielomianach wielu zmiennych i szacuje złożoność obliczeniową (zdefiniowaną jako maksymalną ilość wykonanych przez algorytm podstawowych operacji) algorytmu.

W czasie referatu przedstawię oszacowanie złożoności przedstawione w [3], porównam algorytm z [1] z algorytmami wykorzystującymi bazy Groebnera oraz omówię granice stosowalności algorytmu z [1]. Przedstawione zostaną przykłady ilustrujące zalety omawianego podejścia.

[1] E. Adamus, P. Bogdan, T. Crespo, Z. Hajto, *An effective study of polynomial maps*, Journal of Algebra and Its Applications, Vol. 16, No. 5 (2016), DOI: `http://dx.doi.org/10.1142/S0219498817501419`.

[2] E. Adamus, P. Bogdan, Z. Hajto, *An effective approach to Picard-Vessiot theory and the Jacobian Conjecture*, submitted: `https://arxiv.org/abs/1506.01662`.

[3] P. Bogdan, *Complexity of the inversion algorithm of polynomial mappings*, Schedae Informaticae Vol. 25 (2016): 209–225, DOI: 10.4467/20838476SI.16.016.6197

[4] T. Crespo, Z. Hajto, *Picard-Vessiot theory and the Jacobian Problem*, Israel Journal of Mathematics, Vol. 186 (2012): 401-406.

O PEWNYM NAWIASIE ALGEBRAICZNYM I JEGO ROLI W RZUTOWYCH GEOMETRIACH CARTANA

Aleksandra Borówka
Instytut Matematyki, Uniwersytet Jagielloński
Aleksandra.Borowka@uj.edu.pl

Dla każdej z parabolicznych geometrii Cartana z przemiennym nilradykałem można zdefiniować pewien nawias algebraiczny indukowany przez nawias Liego. Definiuje on klasę wszystkich koneksji niezmienniczych ze względu na zadaną strukturę. W referacie opiszę sposób konstrukcji tego nawiasu. Używając jego własności, pokażę prosty dowód nietrywialnej zależności pomiędzy c-projektywną i kwaternionową geometrią Cartana.

ROZKŁADALNE ROZMAITOŚCI ABELOWE

Paweł Borówka
Instytut Matematyki, Uniwersytet Jagielloński
Pawel.Borowka@uj.edu.pl

Ogólna zespolona rozmaitość abelowa z polaryzacją główną jest prosta, czyli nie zawiera nietrywialnych podrozmaitości abelowych. Zbiór rozkładalnych rozmaitości abelowych jako podzbiór przestrzeni moduli posiada nieskończenie wiele składowych nierozkładalnych. Dyskretnym niezmiennikiem rozkładalnej rozmaitości jest typ indukowanej polaryzacji na podrozmaitość. Pokażemy, że zbiór rozmaitości zawierających podrozmaitość o ustalonym wymiarze i typie indukowanej polaryzacji jest nierozkładalny w przestrzeni moduli. Podamy również równania na przeciwobraz tego zbioru w górnej półprzestrzeni Siegela.

WZORY CRAMERA DLA AUTOMORFIZMÓW WIELOMIANOWYCH

Szymon Brzostowski
Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Łódzkiego
brzosts@math.uni.lodz.pl

Niech $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ będzie automorfizmem wielomianowym. W trakcie referatu przedstawimy metodę znajdowania automorfizmu odwrotnego f^{-1} będącą, wedle naszego mniemania, naturalnym uogólnieniem szkolnych wzorów Cramera dla automorfizmów liniowych.

KONSTRUKCJE CIĄGŁYCH ODWZOROWAŃ k-REGULARNYCH PRZY UŻYCIU SKOŃCZONYCH SCHEMATÓW

Jarosław Buczyński
Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk
jabu@mimuw.edu.pl

Odwzorowanie ciągłe $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^N$ lub $\mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^N$ nazywamy k-regularnym, jeśli obraz dowolnej k-tki różnych punktów jest liniowo niezależny. Dla ustalonych liczb naturalnych m i k Czebyszew oraz Borsuk pytali, jak znaleźć możliwie najmniejsze N takie, aby istniało odwzorowanie k-regularne jak wyżej. Metody topologii algebraicznej pozwalają oszacować N z dołu. W czasie wykładu, używając geometrii algebraicznej, przedstawię, jak można konstruować odwzorowania k-regularne. Powiążemy oszacowania górne na najmniejsze możliwe N z wymiarem schematu Hilberta. Jeśli $m \leq 2$ lub $k \leq 9$, to te obliczenia są konkretne i często optymalne, natomiast dla dowolnych k i m podajemy oszacowania górne.

Problem ten ma swoją naturalną interpretację w języku teorii interpolacji. Dla przestrzeni topologicznej X oraz przestrzeni liniowej V, odwzorowanie ciągłe $X \to V$ jest k-regularne wtedy i tylko wtedy, gdy przestrzeń dualna V^* zanurzona w przestrzeń funkcji ciągłych z X do ciała bazowego $\mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$ jest k-interpolująca, to znaczy, dla dowolnych k różnych punktów $x_1, \ldots, x_k$ należących do X oraz dowolnych wartości f_i, istnieje funkcja z V^*, która przyjmuje wartości f_i w punktach x_i. Analogicznie można interpolować funkcje ciągłe o wartościach wektorowych i te same metody geometrii algebraicznej dają ciekawe wyniki o takich funkcjach.

[1] J. Buczyński, T. Januszkiewicz, J. Jelisiejew, M. Michałek, *Constructions of k-regular maps using finite local schemes*, to appear in Journal of European Mathematical Society, arXiv:1511.05707.

[2] M. Michałek, C. Miller, *Examples of k-regular maps and interpolation spaces*, arXiv:1512.00609.

[3] J. Buczyński, T. Januszkiewicz, *praca w przygotowaniu.*

CIĄGI AUTOMATYCZNE I NILROZMAITOŚCI

Jakub Byszewski
Uniwersytet Jagielloński
jakub.byszewski@uj.edu.pl

Wielomiany uogólnione to funkcje, które można zapisać przy pomocy operacji algebraicznych oraz operacji podłogi. Wyniki Bergelsona–Leibmana wiążą wielomiany uogólnione z dynamiką na nilrozmaitościach. W referacie omówimy wyniki dotyczące rzadkich wielomianów uogólnionych, tzn. wielomianów uogólnionych, które przyjmują wartości niezerowe wyłącznie na zbiorze gęstości zero. Uzyskane wyniki zastosujemy do pytania, które ciągi automatyczne mogą zostać zadane przez wielomiany uogólnione. W pracy wykorzystujemy metody teorii ergodycznej, kombinatoryki addytywnej i teorii liczb.

Przedstawione wyniki są oparte na wspólnej pracy z Jakubem Koniecznym (Oxford).

[1] J. Byszewski, J. Konieczny, *Sparse generalised polynomials*, arxiv.org/abs/1612.00073.

[2] J. Byszewski, J. Konieczny, *Automatic sequences, generalised polynomials, and nilmanifolds*, arxiv.org/abs/1610.03900.

PID, KTÓRY NIE JEST PIERŚCIENIEM EUKLIDESA I KRZYWE ELIPTYCZNE Z MNOŻENIEM ZESPOLONYM

Sławomir Cynk
Instytut Matematyki, Uniwersytet Jagielloński
slawomir.cynk@uj.edu.pl

Pod koniec semestru letniego roku 1984 *dr Kamil Rusek*, wykładowca przedmiotu Algebra, zadał mnie i moim kolegom (studentom I roku) zadanie:

Udowodnić, że pierścień $\mathbb{Z}\left[\frac{1+\sqrt{-19}}{2}\right]$ *jest pierścieniem ideałów głównych.*

Dodał ponadto informację, że pierścień ten nie jest pierścieniem Euklidesa (z komentarzem, że jest to łatwiejsze do udowodnienia). Liczba -19 jest jedną z dziewięciu liczb Hegnera

$$-1, -2, -3, -7, -11, -19, -43, -67, -163,$$

czyli ujemnych liczb całkowitych d, dla których liczba klas ciała kwadratowego $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ jest równa jeden. Powyższa własność ma wiele geometrycznych konsekwencji, zwykle związanych z istnieniem krzywych eliptycznych z mnożeniem zespolonym.

Poza wspomnieniem o jednej z najsłynniejszych liczb "prawie całkowitych" przedstawię zastosowania do konstrukcji rozmaitości Calabi–Yau.

[1] S. Cynk, M. Schuett, *Generalised Kummer constructions and Weil restrictions*, J. Numb. Theory vol. 129 (2009), 1965–1975.

[2] M. Gardner, (April 1975). *Mathematical Games*, Scientific American. Scientific American, Inc. 232 (4): 127.

TOPOLOGIA ZARISKIEGO I STRUKTURY TOPOLOGIZOWALNE

Joanna Dutka
Politechnika Śląska
joanna.dutka@polsl.pl

Strukturę $\mathcal{A}$ nazywamy topologizowalną, jeśli istnieje niedyskretna topologia Hausdorffa na $\mathcal{A}$, taka że wszystkie funkcje z $\mathcal{A}$ są ciągłe i wszystkie relacje z $\mathcal{A}$ są domknięte w odpowiednich potęgach $\mathcal{A}$.

M.V. Kotov w [1] dowiódł twierdzenie anonsowane przez A.D. Taimanova w [2] – przeliczalna (uniwersalna) algebra $\mathcal{A}$ jest topologizowalna wtedy i tylko wtedy, gdy topologia Zariskiego na $\mathcal{A}$ nie jest dyskretna.

W referacie zarysuję szkic dowodu ogólniejszego twierdzenia, w którym nie zakładamy przeliczalności struktury $\mathcal{A}$ i brak relacji. Dodatkowo pokażę, że w przypadku topologizowalności przeliczalnej struktury relacyjnej można skonstruować niedyskretną topologię Hausdorffa tak, by była całkowicie niespójna i metryzowalna.

[1] M.V. Kotov, *On the topologizability of countable equationally Noetherian algebras*, Algebra and Logic **52**, 105–115 (2013)(Russian).

[2] A.D. Taimanov, *Topologization of countable algebras*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **243**, 284–286 (1978).

O STAŁYCH WALDSCHMIDTA IDEAŁÓW

Łucja Farnik
Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk
lucja.farnik@gmail.com

W ostatnich latach asymptotyczne niezmienniki ideałów były intensywnie badane. Jednym z takich niezmienników jest stała Waldschmidta, która jest asymptotycznym odpowiednikiem stopnia początkowego ideału. Słynna hipoteza Nagaty może być wyrażona w następujący sposób: na płaszczyźnie rzutowej stała Waldschmidta ideału $r > 9$ punktów w położeniu bardzo ogólnym jest równa $\sqrt{r}$.

Omówię znane ograniczenia na stałą Waldschmidta, następnie przedstawię ograniczenie górne tej stałej za pomocą asymptotycznego wielomianu Hilberta. Referat na podstawie wspólnej pracy z M. Dumnickim i H. Tutaj-Gasińską [1].

[1] M. Dumnicki, Ł. Farnik, H. Tutaj-Gasińska, *Asymptotic Hilbert Polynomial and a bound for Waldschmidt constants*, Electron. Res. Announc. **23** (2016), 8–18.

OSOBLIWOŚCI GENERYCZNYCH ODWZOROWAŃ WIELOMIANOWYCH PŁASZCZYZNY ZESPOLONEJ

Michał Farnik
Instytut Matematyki, Uniwersytet Jagielloński
Michal.Farnik@gmail.com

Zbiór $\Omega(d_1, d_2)$ odwzorowań wielomianowych $\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ stopnia co najwyżej (d_1, d_2) posiada strukturę przestrzeni afinicznej. Omówię własności generycznego odwzorowania $F \in \Omega(d_1, d_2)$, czyli należącego do pewnego niepustego otwartego w topologii Zariskiego podzbioru $\Omega(d_1, d_2)$. Opiszę zbiór punktów krytycznych $C(F)$ oraz dyskryminant $F(C(F))$ odwzorowania F. Powiem o ich biwymierności, o gładkości $C(F)$ i o tym, że jedynymi osobliwościami wyróżnika są pętle i ostrza, obliczę ich liczbę w zależności od d_1 i d_2.

Referat na podstawie wspólnej pracy z Z. Jelonkiem i M.A.S. Ruas [1].

[1] M. Farnik, Z. Jelonek, M.A.S. Ruas, *Effective Whitney theorem for complex polynomial mappings of the plane*, preprint, arXiv:1503.00017v3 [math.AG].

O KLASYFIKACJI NISKOWYMIAROWYCH ALGEBR LIEGO

Vasyl Fedorchuk

Instytut Matematyki, Uniwersytet Pedagogiczny im. Komisji Edukacji Narodowej w Krakowie; Instytut Problemów Stosowanych Mechaniki i Matematyki im. Jarosława Pidstryhacza Narodowej Akademii Nauk Ukrainy we Lwowie

fedorchuk@up.krakow.pl

Planuję omówić niektóre wyniki dotyczące klasyfikacji niskowymiarowych ($\dim L \leq 4$) algebr Liego oraz niskowymiarowych ($\dim L \leq 4$) niesprzężonych podalgebr algebry Liego uogólnionej grupy Poincaré $P(1, 4)$.

Klasyfikacja niskowymiarowych ($\dim L \leq 4$) niesprzężonych podalgebr algebry Liego grupy $P(1, 4)$ oraz wyniki z nią powiązane zostały uzyskane wspólnie z Volodymyrem Fedorchukiem.

[1] S. Lie, F. Engel, *Theorie der Transformationsgruppen: In 3 Bd.*, **Bd 1–3**, Teubner, Leipzig, 1888, 1890, 1893.

[2] L. Bianchi, *Lezioni sulla teoria dei gruppi continui finiti di trasformazioni*, Spoerri, Pisa, 1918.

[3] G.M. Mubarakzyanov, *On solvable Lie algebras* (Russian), Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved., Ser. Mat. No. **1(32)** (1963), 114–123.

[4] V.I. Fushchich, A.G. Nikitin, *Symmetry of equations of quantum mechanics* (Russian), Nauka, Moscow, 1990. (English translation, published by Allerton Press, Inc., New York, 1994.)

[5] V.I. Fushchich, L.F. Barannik, A.F. Barannik, *Subgroup analysis of Galilei and Poincaré groups and the reduction of nonlinear equations* (Russian), Naukova Dumka, Kiev, 1991.

[6] R.O. Popovych, V.M. Boyko, M.O. Nesterenko, M.W. Lutfullin, *Realizations of real low-dimensional Lie algebras*, J. Phys. A. **36**, (2003), 7337–7360.

[7] V.M. Fedorchuk, V.I. Fedorchuk, *On classification of the low-dimensional non-conjugate subalgebras of the Lie algebra of the Poincaré group* $P(1, 4)$ (Ukrainian), Proceedings of the Institute of Mathematics of National Academy of Sciences of Ukraine **3**, (2006), 302–308.

[8] V.M. Fedorchuk, V.I. Fedorchuk, *Invariant operators for four-dimensional nonconjugate subalgebras of the Lie algebra of the Poincaré group* $P(1, 4)$ (Ukrainian), Mat. Metodi Fiz.-Mekh. Polya. **53**, (2010), 17–27; translation in J. Math. Sci. **181**, (2012), 305–319.

[9] V. Fedorchuk, V. Fedorchuk, *On Classification of Symmetry Reductions for the Eikonal Equation*, Symmetry **8**, (2016), Art. 51, 32pp; doi:10.3390/sym8060051.

PIERŚCIEŃ WITTA PIERŚCIENI DOPUSZCZALNYCH

Paweł Gładki
Uniwersytet Śląski
pawel.gladki@us.edu.pl

Przedmiotem referatu jest przedstawienie nowej konstrukcji pierścienia Witta pierścieni dopuszczalnych. Pierścienie dopuszczalne są nowym typem algebr, których uniwersum jest częściowym porządkiem spełniającym pewien ogólny warunek zwartości, z którym dodawanie jest częściowo kompatybilne, wszelako nie tworzy grupy abelowej, lecz jedynie dopuszcza prawo lax-wymiany pozwalające na częściowe przenoszenie wyrazów z jednej strony nierówności na drugą. Kanoniczne przykłady pierścieni dopuszczalnych otrzymujemy ze zwykłego pierścienia, wyposażając kratę jego wszystkich niepustych podzbiorów w relację częściowego porządku przez inkluzję oraz w działania indukowane z działań pierścienia lub z hiperpierścienia, tj. pierścienia z wielowartościowym dodawaniem, postępując w analogiczny sposób. Okazuje się, że na tak określonych strukturach można przeprowadzić konstrukcję pierścienia Witta form dwuliniowych. W przypadku, gdy dany pierścień dopuszczalny pochodzi od ciała, jego pierścień Witta jest izomorficzny z klasycznym pierścieniem Witta, przy czym dyskutowana konstrukcja jest niezależna od charakterystyki wyjściowego ciała. Jest to wspólna praca z Krzysztofem Worytkiewiczem.

O DUŻYCH PODGRUPACH WOLNYCH GRANICY ODWROTNEJ GRUP

Szymon Głąb
Instytut Matematyki, Politechnika Łódzka
szymon.glab@p.lodz.pl

Nasz główny wynik brzmi następująco.

Twierdzenie. *Niech* $((G_i)_{i\in\mathbb{N}}, (f_{i,j})_{i\leqslant j}, (e_{i,j})_{i\leqslant j})$ *będzie systemem odwrotnym grup z zanurzeniami, tzn.* $e_{i,j} : G_i \to G_j$, $i \leqslant j$, *są zanurzeniami,* $f_{i,j} \circ e_{i,j}$ *jest identycznością na* G_i *oraz* $e_{i,j} = e_{k,j} \circ e_{i,k}$ *dla* $i \leqslant k \leqslant j$. *Załóżmy, że dla każdej grupy* G_i *i dla każdego słowa* w *istnieją* $k \geqslant i$ *oraz podgrupa* $H_{i,k}$ *jądra* $\ker f_{i,k}$ *o następujących własnościach*

(i) $e_{i,k}(G_i) \cap H_{i,k} = \{1_k\}$;

(ii) $gh = hg$ *dla każdych* $g \in e_{i,k}(G_i)$ *oraz* $h \in H_{i,k}$;

(iii) relacja $w(x_1, \ldots, x_n) = 1$ *nie zachodzi w* $H_{i,k}$.

Wówczas $\underleftarrow{\lim} G_i$ *zawiera grupę wolną continuum generatorów.*

Jako zastosowanie powyższego twierdzenia dostajemy następujące fakty.

1. Jeśli grupa nieskończonych macierzy unitrójkątnych $UT(\infty, R)$ o wyrazach z pierścienia R zawiera grupę wolną dwóch generatorów, to zawiera grupę wolną continuum generatorów.

2. Grupa izometrii zbioru Cantora zawiera grupę wolną continuum generatorów.

3. Niech G_n, $n \in \mathbb{N}$, będą grupami. Jeśli dla każdego słowa w i nieskończenie wielu n relacja $w(x_1, \ldots, x_n) = 1$ nie zachodzi w G_n, to $\prod_{n\in\mathbb{N}} G_n$ zawiera grupę wolną continuum generatorów.

4. Niech $p_1 < p_2 < \ldots$ będzie ciągiem, niekoniecznie wszystkich, liczb pierwszych i niech $n_i \in \mathbb{N}$. Wówczas grupa automorfizmów grupy $\prod_i \mathbb{Z}_{p_i}^{n_i}$ zawiera grupę wolną continuum generatorów wtedy i tylko wtedy, gdy dla nieskończenie wielu indeksów i, $n_i \geq 2$.

LOKALNIE NILPOTENTNE SKOŚNE RÓŻNICZKOWANIA Z CENTRALNYMI STAŁYMI

Piotr Grzeszczuk
Politechnika Białostocka
p.grzeszczuk@pb.edu.pl

Niech R będzie algebrą łączną z lokalnie nilpotentnym skośnym różniczkowaniem δ, takim że podalgebra stałych $R^\delta = \ker\delta$ jest zawarta w centrum $Z(R)$. Przedyskutujemy warunki gwarantujące przemienność algebry R. Dla algebr nieprzemiennych przedstawione będą warunki, przy których centralność stałych implikuje zawieranie ideału komutatorowego $R[R,R]R$ w nilradykale algebry R. Rezultaty te nawiązują do wyników G.M. Bergmana i I.M. Isaacsa [2], oraz J. Osterburga [3] i rzucają pewne światło na hipotezę Hersteina z roku 1961 mówiącą, że jeśli R jest algebrą charakterystyki $p > 0$ posiadającą automorfizm σ rzędu p, taki że $R^\sigma \subseteq Z(R)$, to $R[R,R]R$ jest nil ideałem.

Wyniki uzyskane zostały we współpracy z J. Bergenem (DePaul University) i pochodzą z pracy [1]. Badania zostały zrealizowane w ramach pracy S/WI/1/2014 i sfinansowane ze środków na naukę MNiSW.

[1] J. Bergen, P. Grzeszczuk, *Locally Nilpotent Skew Derivations with Central Invariants*, J. Algebra (to appear).

[2] G.M. Bergman and I.M. Isaacs, *Rings with fixed point free group actions*, Proc. London Math. Soc. **27** (1973), 69–87.

[3] J. Osterburg, *Central fixed rings*, J. London Math. Soc. **(2)** (1981), 246–248.

PIERŚCIENIE NIEDYSTRYBUTYWNE

Małgorzata Hryniewicka
Instytut Matematyki, Uniwersytet w Białymstoku
margitt@math.uwb.edu.pl

Na ogół od *pierścienia* wymagamy, by był zbiorem co najmniej dwuelementowym, w którym możemy określić dwuargumentowe operacje zwane dodawaniem i mnożeniem, o którym możemy powiedzieć, że (1) tworzy grupę abelową względem dodawania, (2) tworzy półgrupę z jedynką względem mnożenia, (3) oba działania są powiązane ze sobą prawami rozdzielności $r\cdot(s+t) = r\cdot s+r\cdot t$ oraz $(r+s)\cdot t = r\cdot t+s\cdot t$ dla wszystkich elementów $r, s, t \in R$. Z rozdzielności wynika równość $r\cdot 0 = 0 = 0\cdot r$ zachodząca dla każdego elementu $r \in R$. Gdy zrezygnujemy z abelowości grupy addytywnej, a lewostronną dystrybutywność zastąpimy słabszym warunkiem $r \cdot 0 = 0$ zachodzącym dla każdego elementu $r \in R$, wówczas otrzymamy *prawiepierścień* (prawostronny, zerosymetryczny, z jedynką). Celem referatu będzie przyjrzenie się *pierścieniom niedystrybutywnym*, w których rezygnujemy również z prawostronnej dystrybutywności, zastępując ją słabszym warunkiem $0 \cdot r = 0$ zachodzącym dla każdego elementu $r \in R$.

GRAFY IDEAŁÓW ANIHILUJĄCYCH A KRATY ANIHILATORÓW W PIERŚCIENIACH

Małgorzata Jastrzębska
Uniwersytet Przyrodniczo-Humanistyczny w Siedlcach
majastrz2@wp.pl

Niech R będzie pierścieniem łącznym, przemiennym z $1 \neq 0$, i niech I będzie właściwym ideałem w R. Powiemy, że I jest ideałem anihilującym w R, jeśli istnieje niezerowy ideał J w R, taki że $IJ = 0$. Ideał I będziemy nazywać anihilatorem w R, jeśli istnieje ideał K, taki że $I = \{r \in R | \ rK = 0\}$. Stąd każdy anihilator jest ideałem anihilującym. Wiadomo, że zbiór anihilatorów w pierścieniu, uporządkowany przez relację inkluzji, tworzy kratę.

Przez $A(R)$ oznaczmy zbiór wszystkich niezerowych ideałów anihilujących w R. W literaturze pojawiają się różne definicje grafów o wierzchołkach z $A(R)$.

Celem tego referatu będzie przedstawienie pewnych związków wybranych grafów ideałów anihilujących z kratami anihilatorów, a także wskazanie różnic pomiędzy tymi strukturami.

[1] L. Demeyer, A. Schneider, *The annihilating-ideal graph of commutative semigroups*, Journal of Algebra **469** (2017), 402–420.

[2] A. Badawi, *On the annihilator graph of a commutative ring*, Comm. Algebra 42 **1** (2014), 108–121.

[3] M. Jastrzębska, J. Krempa *Lattices of annihilators in commutative algebras over fields*, Demonstr. Math. **48** (2015), 545–552.

KONSTRUKCJE KATEGORYJNE MOTYWOWANE ZBIORAMI UOGÓLNIONYMI

Piotr Jędrzejewicz
Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu
Wydział Matematyki i Informatyki
pjedrzej@mat.umk.pl

Jednym z naturalnych uogólnień pojęcia zbioru jest pojęcie multizbioru, tzn. zbioru z elementami wielokrotnymi. W pewnych sytuacjach warto jeszcze bardziej rozszerzyć to pojęcie w taki sposób, by dopuścić również krotności ujemne – Hassler Whitney zauważył to w pracy [1] już w 1933 r. Współczesne systematyczne badania takiego uogólnienia zbiorów rozpoczęły m.in. prace Wolfganga Reisiga ([2], rozdz. 9), Wayne'a D. Blizarda ([3]) i Daniela Loeba ([4]).

Celem referatu jest przedyskutowanie sposobów, jakimi można wykorzystać powyższe koncepcje do znalezienia odpowiedzi na następujące pytanie sformułowane przez Stephena Schanuela w 1990 r. Oczywiście to pytanie jest sformułowane zbyt ogólnie i wymaga doprecyzowania – sam Schanuel określił je jako „ill-posed".

Pytanie ([5]). Czy istnieje takie rozszerzenie $\mathbb{E}$ kategorii zbiorów skończonych $\mathbb{S}$, dla którego klasami izomorfizmów będą liczby całkowite zamiast liczb naturalnych?

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S} & \hookrightarrow & \mathbb{E} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{N} & \hookrightarrow & \mathbb{Z} \end{array}$$

[1] H. Whitney, *Characteristic functions and the algebra of logic*, Ann. of Math. **34** (1933), 405–414.

[2] W. Reisig, *Petri nets, An introduction*, Monogr. Theoret. Comput. Sci. EATCS, **4**, Springer, Berlin, 1985.

[3] W.D. Blizard, *Negative membership*, Notre Dame J. Formal Logic **31** (1990), 346–368.

[4] D. Loeb, *Sets with a negative number of elements*, Adv. Math. **91** (1992), 64–74.

[5] S. Schanuel, *Negative sets have Euler characteristic and dimension*, w: *Category Theory, Como 1990*, Lecture Notes in Math., **1488**, Springer, Berlin, 1991, 379–385.

O PROBLEMIE BEIDARA – MIKHALEVA

Marek Kępczyk
Politechnika Białostocka
m.kepczyk@pb.edu.pl

Niech R będzie pierścieniem łącznym i niech R_1, R_2 będą podpierścieniami R, takimi że $R = R_1 + R_2$, tzn. dla każdego $r \in R$ istnieją $r_1 \in R_1$ oraz $r_2 \in R_2$, takie że $r = r_1 + r_2$. W 1995 K.I. Beidar i A.V. Mikhalev postawili następujący problem: załóżmy, że R_1 i R_2 spełniają tożsamości wielomianowe (krótko, są PI pierścieniami), czy wtedy również R jest PI pierścieniem?

Przedstawimy fakty z pracy [1], w której znajduje się rozwiązanie tego problemu.

Badania zostały zrealizowane w ramach pracy S/WI/1/2016 (Politechnika Białostocka) i sfinansowane ze środków na naukę MNiSW.

[1] M. Kępczyk, *A ring which is a sum of two PI subrings is always a PI ring*, przyjęta do Israel Journal of Mathematics.

TOŻSAMOŚCI WIELOMIANOWE DLA RÓŻNICZKOWAŃ

Agnieszka Kowalska
Instytut Matematyki Uniwersytetu Pedagogicznego im. Komisji Edukacji Narodowej w Krakowie
kowalska@up.krakow.pl

Przedstawione zostaną różne wersje pewnej tożsamości dla różniczkowań. Tożsamość ta zachodzi w dowolnej zespolonej algebrze przemiennej $\mathcal{A}$ z jedynką dla dowolnego operatora liniowego $D : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ spełniającego warunek $D(fg) = D(f)g + fD(g)$ i pozwala na uzyskanie dogodnego w wielu sytuacjach oszacowania. Tego typu tożsamości mają zastosowania w teorii aproksymacji. Podane będą również informacje dotyczące możliwości uogólnienia tej tożsamości.

[1] M. Baran, A. Kowalska, B. Milówka, P. Ozorka, *Identities for a derivation operator and their applications*, Dolomites Research Notes on Approximation **8** (2015), 102–110.

PROBLEM ARNOLDA O MONOTONICZNOŚCI LICZBY NEWTONA OSOBLIWOŚCI POWIERZCHNI

Tadeusz Krasiński
Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Łódzki
krasinsk@uni.lodz.pl

Niech $f : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ będzie osobliwością izolowaną i $\mu(f) \in \mathbb{N}$ jej liczbą Milnora. Dla generycznego f (niezdegenerowanego w sensie Kusznirenki) $\mu(f)$ oblicza się z kombinatorycznego obiektu stowarzyszonego z f – wielościanu Newtona $\mathcal{N}(f) \subset \mathbb{R}^n_+$, który zależy tylko od skończonej liczby współczynników rozwinięcia f w szereg Taylora. Mianowicie, Kusznirenko w 1976 roku udowodnił, że $\mu(f) = \nu(\mathcal{N}(f))$, gdzie $\nu(\mathcal{N}(f))$ jest tzw. liczbą Newtona wielościanu $\mathcal{N}(f)$. V.I. Arnold postawił hipotezę w 1982 roku, że $\nu(\mathcal{N}(f))$ zależy monotonicznie od $\mathcal{N}(f)$ ze względu na relację zawierania w zbiorze wielościanów Newtona. Problem został rozwiązany (pozytywnie) przez wielu autorów m.in. Warczenkę, Steenbrinka, Furuyę, Bivia-Ausinę, Gwoździewicza, Lenarcika.

W referacie przedstawię istotne uzupełnienie tego twierdzenia poprzez podanie prostego, geometrycznego warunku, koniecznego i dostatecznego na zachodzenie ścisłej monotoniczności. Pełny dowód tego rezultatu podajemy w przypadku osobliwości powierzchni tzn. dla $n = 3$. Przypadek dwuwymiarowy ($n = 2$) jest prosty. Dowód w ogólnym przypadku dowolnego n, jest w trakcie badań. Prezentowane wyniki są wspólne z Szymonem Brzostowskim i Justyną Walewską.

[1] Sz. Brzostowski, T. Krasiński, J. Walewska, *Arnold's problem on monotonicity of the Newton number for surface singularities* (w przygotowaniu).

GEOMETRIA NASHOWSKICH FUNKCJI MEROMORFICZNYCH

Wojciech Kucharz
Uniwersytet Jagielloński
Wojciech.Kucharz@im.uj.edu.pl

Badania w ciągu ostatnich lat doprowadziły do odkrycia wielu interesujących własności funkcji wymiernych klasy $\mathcal{C}^k$ na $\mathbb{R}^n$, gdzie k jest liczbą naturalną. W pierścieniu złożonym z takich funkcji zachodzi twierdzenie o zerach (Nullstellensatz), które pozwala rozwinąć teorię snopów quasi-koherentnych i udowodnić dla nich odpowiedniki twierdzeń A i B Cartana. Wykażę analogiczne twierdzenia dla nashowskich funkcji meromorficznych klasy $\mathcal{C}^k$ na dowolnej rozmaitości Nasha.

O PEWNYCH KRYTERIACH PRZEMIENNOŚCI PIERŚCIENIA δ-PIERWSZEGO

Kamil Kular
Instytut Matematyki, Politechnika Krakowska
kkular@pk.edu.pl

Niech $\delta : R \longrightarrow R$ będzie różniczkowaniem pierścienia łącznego R. Ideał $I \subseteq R$ nazywamy δ-ideałem, gdy $\delta(I) \subseteq I$. Pierścień R nazywamy δ-pierwszym, gdy jest niezerowy i, dla dowolnych δ-ideałów $I, J \subseteq R$, jeśli $IJ = 0$, to $I = 0$ lub $J = 0$.

W referacie udowodnimy następujące

Twierdzenie. *Przypuśćmy, że R jest δ-pierwszy oraz że $\delta(x)\delta(y) = \delta(y)\delta(x)$ dla dowolnych $x, y \in R$. Jeśli wówczas spełniony jest jeden z następujących warunków:*
(1) $\delta^3 \neq 0$,
(2) $\delta \neq 0$ *oraz R jest 2-beztorsyjny,*
to pierścień R jest przemienny.

Przedstawimy również kilka innych spostrzeżeń dotyczących przemienności pierścieni δ-pierwszych.

O PIERŚCIENIACH FUNKCJI ŁUKOWO-ANALITYCZNYCH I FUNKCJI WYMIERNYCH CIAGŁYCH

KRZYSZTOF KURDYKA
Laboratoire de Mathématiques (LAMA) UMR 5127 CNRS
Université Savoie Mont Blanc, France
Krzysztof.Kurdyka@univ-savoie.fr

W geometrii algebraicznej rzeczywistej pojawiają się naturalnie, por. [1], funkcje łukowo-analityczne (i semi-algebraiczne), tzn. takie, że w złożeniu z łukami analitycznymi są analityczne. Pierścienie tych funkcji mają dość zaskakujące wlasności, prawdziwa jest wersja Nullstellensatz (jak w przypadku zespolonym), nie są noetherowskie, ale rosnący ciąg ideałów pierwszych się stabilizuje. Ten fakt jest konsekwencją niedawno uzyskanego wyniku [8].

W ostatnich latach, por. [3, 4, 5, 6, 7] jest intensywnie badany pierścień funkcji wymiernych ciagłych, który jest podpierścieniem pierścienia funkcji łukowo-analitycznych. Postaram się przedstawić najważniejsze wyniki i perspektywy badań w tej dziedzinie. Istotną własnością obu klas tych funkcji jest fakt [2], że po zlożeniu z odpowiednim ciągiem rozdmuchań (o gładkich centrach) funkcje te stają się analityczne (odpowiednio regularne).

[1] K. Kurdyka, *Ensembles semi-algébriques symétriques par arcs*, Math. Ann. 281 no. 3 (1988), 445–462.

[2] E. Bierstone, P-D. Milman, *Arc-analytic functions*. Invent. Math. 101, 411–424 (1990).

[3] W. Kucharz, *Rational maps in real algebraic geometry*, Adv. Geom. 9 (2009), 517–539.

[4] J. Kollár, K. Nowak, *Continuous rational functions on real and p-adic varieties*, Math. Z. **279** (2015), 85–97.

[5] G. Fichou, J. Huisman, F. Mangolte, J.-Ph. Monnier, *Fonctions régulues*, J. Reine Angew. Math. **718** (2016), 103–151.

[6] G. Fichou, J.-Ph. Monnier, R. Quarez, *Continuous functions on the plane regular after one blowing-up*. Math. Z. **285** (2017), no. 1-2, 287–323.

[7] J. Kollár, W. Kucharz, K. Kurdyka, *Curve-rational functions*, Math. Ann. (2017).

[8] J. Adamus, H. Seyedinejad, *A proof of Kurdyka's conjecture on arc-analytic functions,* arXiv:1701.02712 (2017).

PRZESTRZEŃ PARAMETRÓW DLA PEWNYCH KONFIGURACJI PROSTYCH

Magdalena Lampa-Baczyńska
Uniwersytet Pedagogiczny w Krakowie
lampa.baczynska@wp.pl

Konfiguracje prostych i punktów są klasycznym obiektem badań w obszarze algebry, geometrii i kombinatoryki. Przez wiele lat zadawano sobie m.in. pytanie o minimalną liczbę tzw. prostych zwyczajnych w konfiguracji, czyli przechodzących przez dokładnie dwa punkty ze skończonego zbioru punktów $Z = \{P_1, \ldots, P_s\}$. Przykłady konfiguracji punktów z małą liczbą prostych zwyczajnych podał Böröczky.

Ideał pochodzący od dualnej konfiguracji prostych okazał się też pierwszym znanym w geometrii algebraicznej kontrprzykładem na słynną hipotezę Harbourne'a i Hunekego ([1], Conjecture 4.1.1.) dotyczącą zawierań między potęgami ideałów – zwykłymi i symbolicznymi w pierścieniu wielomianów rzeczywistych.

W pracy [2] zaprezentowano inne spojrzenie na konfiguracje prostych i punktów. Zwrócono uwagę na aspekty, które dotychczas nie były brane pod uwagę. Rozważania dotyczyły przestrzeni parametrów dla konfiguracji 12-tu oraz 15-tu prostych zachowujących kombinatorykę konfiguracji Böröczky'ego. Jedna z tych przestrzeni okazała się trójwymiarową rozmaitością wymierną, a drugą zidentyfikowano jako krzywą eliptyczną o skończonej liczbie punktów wymiernych.

Celem niniejszego wystąpienia jest zaprezentowanie głównych wyników z pracy [2] dotyczących tych konfiguracji.

[1] B. Harbourne, C. Huneke, *Are symbolic powers highly evolved?*, J. Ramanujan Math. Soc. **28**, 311–330 (2013).

[2] M. Lampa-Baczyńska, J. Szpond, *From Pappus Theorem to parameter spaces of some extremal line point configurations and applications*, Geometriae Dedicata, DOI: 10.1007/s10711-016-0207-8 (2016).

O PROBLEMIE SUSZKIEWICZA Z DZIELNIKAMI ZERA

Martyna Maciaszczyk
Instytut Matematyki Politechniki Śląskiej
martyna.maciaszczyk@polsl.pl

Przedstawię rozwiązanie starego problemu Suszkiewicza dotyczącego prawych dzielników zera w pierścieniu $T(\infty, \mathbb{K})$ nieskończonych $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ macierzy górnotrójkątnych nad ciałem $\mathbb{K}$. W rozwiązaniu użyję notacji silnie liniowej niezależności.

[1] W. Hołubowski, M. Maciaszczyk, S. Żurek, *Note on Suškevič's problem on zero divisors*, Communications in Algebra **Vol. 45, No. 8** (2017), 3274—3277.

[2] A.K Suszkiewicz, *On an infinite algebra of triangular matrices.(Russian)*, Har'kov. Gos. Univ. Uć. Zap. 34 = Zap. Mat. Otd. Fiz.-Mat. Fak. i Har'kov. Mat. Obść.(4) **22** (1950), 77–93.

DUALNOŚĆ DLA ODCINKÓW DIADYCZNYCH

Katarzyna Matczak
Politechnika Warszawska
Wydział Budownictwa, Mechaniki i Petrochemii
Katarzyna.Matczak@pw.edu.pl

Zbiór liczb wymiernych postaci $\frac{m}{2^n}$, dla $m, n \in \mathbb{Z}$ nazywamy zbiorem liczb diadycznych i oznaczmy $\mathbb{D}$. Zbiór $\mathbb{D}$ tworzy podpierścień pierścienia liczb rzeczywistych. Będziemy rozważać przestrzeń afiniczną $\mathbb{D}$ nad pierścieniem $\mathbb{D}$. Przedziałem diadycznym nazwiemy zbiór punktów postaci $[a, b] = \{x \in \mathbb{D}, a \leq x \leq b\}$, dla a i b diadycznych. Celem referatu jest opisanie dualności dla kategorii przedziałów diadycznych. Wiadomo jest, że każde dwa odcinki rzeczywiste są izomorficzne. W przestrzeniach diadycznych istnieje nieskończenie wiele klas nieizomorficznych odcinków, które rozważmy jako algebry z przemienną, binarną operacją. Dualność ta jest zbudowana przy pomocy obiektu schizofrenicznego, którym jest diadyczny odcinek jednostkowy. Przestrzenie dualne do odcinków diadycznych są izomorficzne z podgrupoidami kwadratu diadycznego z dodatkowymi operacjami stałymi. Grupoidy te są z kolei izomorficzne z pewnymi "wypukłymi" zbiorami diadycznymi. W kolejnym referacie zostanie opisana dualność dla trójkątów diadycznych.

[1] K. Matczak, A. Romanowska, J.D.H. Smith, *Dyadic polygons*, Int. J. of Algebra and Computation **21** (2011), 387–408.

[2] A.B. Romanowska, P. Ślusarski and J.D.H. Smith, *Duality for convex polytopes*, J. Austr. Math. Soc. **86** (2009), 399–412.

PROSTA RZUTOWA NAD PIERŚCIENIEM ŁĄCZNYM Z JEDYNKĄ

Andrzej Matraś
Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Warmińsko-Mazurski w Olsztynie
matras@uwm.edu.pl

Prosta rzutowa nad pierścieniem łącznym R z 1 to podzbiór zbioru cyklicznych podmodułów modułu wolnego nad pierścieniem R rangi 2, generowanych przez pary unimodularne. Użyteczność tego pojęcia została zauważona przez niemieckiego geometrę W. Benza, który w monografii [2] pokazał, że klasyczne geometrie Möbiusa, Laguerra i Minkowskiego są geometriami prostych rzutowych nad algebrami będącymi rozszerzeniami stopnia 2 ciała przemiennego. Na prostej rzutowej określa się relację połączalności i jej graf. Pozwala to wprowadzić pewną „geometryczną" strukturę na dowolnym pierścieniu. Przedstawione zostaną znane klasyczne wyniki oraz najnowsze uzyskane wspólnie z E. Bartnicką i A. Siemaszko.

[1] E. Bartnicka, A. Matraś, *Free Cyclic Submodules in the Context of the Projective Line*, Results in Mathematics **70** (2016), 567–580.

[2] W. Benz, *Vorlesungen über Geometrie der Algebren*, Springer, Berlin, 1973.

[3] A. Blunck, H. Havlicek, *Projective Representations I. Projective lines over rings*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **70** (2000), 287–299.

[4] A. Blunck, H. Havlicek, *The Connected Components of the Projective Line over a Ring*, Adv. Geom. **1** (2001), 107–117.

[5] A. Matraś, A. Siemaszko, *The Shortest Path Problem for the Distant Graph of the Projective Line Over the Ring of Integers*, Bull. Malays. Math. Sci. Soc. (2015).

PEWNE WŁASNOŚCI FAKTORIALNE PODPIERŚCIENI

Łukasz Matysiak
Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu
Wydział Matematyki i Informatyki
lmatysiak@mat.umk.pl

Motywacją referatu jest następujące uogólnienie hipotezy jakobianowej. Dla dowolnych wielomianów $f_1, \ldots, f_m \in k[x_1, \ldots, x_n]$, gdzie k jest ciałem charakterystyki zero i $m \in \{2, \ldots, n\}$, jeśli

$$(*)\,\mathrm{NWD}(\mathrm{jac}^{f_1,\ldots,f_m}_{x_{j_1},\ldots,x_{j_m}},\ 1 \leqslant j_1 < \ldots < j_m \leqslant n) \in k \setminus \{0\},$$

to $k[f_1, \ldots, f_m]$ jest pierścieniem stałych pewnej k-derywacji pierścienia $k[x_1, \ldots, x_n]$. Przy założeniu, że wielomiany $f_1, \ldots, f_m$ są algebraicznie niezależne, warunek $(*)$ jest równoważny każdemu z następujących warunków:

(i) zbiór elementów nierozkładalnych podpierścienia $k[f_1, \ldots, f_m]$ zawiera się w zbiorze elementów bezkwadratowych pierścienia $k[x_1, \ldots, x_n]$,

(ii) zbiór elementów bezkwadratowych podpierścienia $k[f_1, \ldots, f_m]$ zawiera się w zbiorze elementów bezkwadratowych pierścienia $k[x_1, \ldots, x_n]$.

Powyższe warunki warto rozważać w ogólniejszej sytuacji – dla podpierścienia dowolnej dziedziny. Te warunki nazywamy odpowiednikami warunku jakobianowego. Głównym celem referatu jest przedyskutowanie związków pomiędzy odpowiednikami warunku jakobianowego a różnymi własnościami faktorialnymi pewnych podpierścieni dziedzin z jednoznacznością rozkładu.

[1] P. Jędrzejewicz, Ł. Matysiak, J. Zieliński, *On some factorial properties of subrings*, zaakceptowana do druku w Universitatis Iagellonicae Acta Mathematica, arXiv:1606.06592.

[2] M. de Bondt, D. Yan, *Irreducibility properties of Keller maps*, Algebra Colloq. **23** (2016), 663–680, arXiv:1304.0634.

[3] P. Jędrzejewicz, J. Zieliński, *Analogs of Jacobian conditions for subrings*, J. Pure Appl. Algebra **221** (2017), 1899–2156, arXiv:1601.01508.

[4] P. Jędrzejewicz, J. Zieliński, *An approach to the Jacobian Conjecture in terms of irreducibility*, arXiv:1611.07439.

PIERŚCIENIE SKOŚNYCH UOGÓLNIONYCH SZEREGÓW POTĘGOWYCH

Ryszard Mazurek
Politechnika Białostocka
r.mazurek@pb.edu.pl

Niech R będzie pierścieniem, $(S, \leq)$ monoidem ściśle uporządkowanym, a $\omega : S \to End(R)$ homomorfizmem monoidów. Pierścień skośnych uogólnionych szeregów potęgowych $R[[S, \omega, \leq]]$ składa się z funkcji $f : S \to R$, których nośnik $supp(f) = \{s \in S \mid f(s) \neq 0\}$ jest artinowski i wąski (tzn. każdy jego niepusty podzbiór ma skończoną liczbę elementów minimalnych względem porządku $\leq$). Takie funkcje dodawane są po współrzędnych i mnożone zgodnie ze wzorem

$$(fg)(s) = \sum_{\substack{x,y \in S \\ xy=s}} f(x) \cdot \omega_x(g(y)) \qquad (f, g \in R[[S, \omega, \leq]],\ s \in S),$$

gdzie $\omega_x = \omega(x)$ dla $x \in S$. Szczególnymi przypadkami tej konstrukcji (wprowadzonej w [5]) są (skośne) pierścienie wielomianów, (skośne) pierścienie szeregów potęgowych, (skośne) pierścienie półgrupowe, (skośne) pierścienie wielomianów Laurenta, (skośne) pierścienie szeregów Laurenta, (skośne) pierścienie szeregów Malceva-Neumanna i pierścienie szeregów Ribenboima. Poza unifikacją wyżej wymienionych klasycznych struktur wykorzystywanych w wielu działach algebry i jej zastosowań, konstrukcja ta dostarcza szeroką klasę przykładów, które mogą być wykorzystywane przy badaniu różnorodnych otwartych problemów teorii pierścieni.

W czasie referatu przedstawione będą własności i zastosowania pierścieni skośnych uogólnionych szeregów potęgowych. W szczególności przedstawione będą charakteryzacje takich pierścieni w klasach pierścieni pewnych specjalnych typów (np. prawostronnie łańcuchowych, prostych, prawostronnie p.q.-Baera; [1], [3], [4]) i zastosowanie takich pierścieni do unifikacji licznych uogólnień pierścieni Armendariza ([2]).

Badania zostały zrealizowane w ramach pracy S/WI/1/2014 (Politechnika Białostocka) i sfinansowane ze środków na naukę MNiSW.

[1] K. Kozłowski, R. Mazurek, K. Paykan, *Simplicity of skew generalized power series rings*, preprint.

[2] G. Marks, R. Mazurek, M. Ziembowski, *A unified approach to various generalizations of Armendariz rings*, Bull. Aust. Math. Soc. **81** (2010), 361–397.

[3] R. Mazurek, *Left principally quasi-Baer and left APP rings of skew generalized power series*, J. Algebra Appl. **14** (2015), no. 3, 1550038 (36 pp).

[4] R. Mazurek, M. Ziembowski, *Uniserial rings of skew generalized power series*, J. Algebra **318** (2007), 737–764.

[5] R. Mazurek, M. Ziembowski, *On von Neumann regular rings of skew generalized power series*, Comm. Algebra **36** (2008), 1855–1868.

O KLASYFIKACJI KWADRATOWYCH ODWZOROWAŃ WIELOMIANOWYCH $\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^3$

Piotr Migus
Politechnika Świętokrzyska
migus.piotr@gmail.com

Niech $\Omega(2,2,2)$ będzie przestrzenią odwzorowań wielomianowych $f = (f_1, f_2, f_3) : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^3$, gdzie $\deg f_i \leq 2$. Przez $GA(2,2)$ (odpowiednio $GA(3,3)$) oznaczamy grupę przekształceń afinicznych $\mathbb{C}^2$ (odpowiednio $\mathbb{C}^3$). Przez $\mathcal{GA}(3,2)$ oznaczamy grupę $GA(3,3) \times GA(2,2)$. Grupa $\mathcal{GA}(3,2)$ działa na zbiór $\Omega(2,2,2)$ następująco: $(L,R)f = L \circ f \circ R$. Orbitę $f \in \Omega(2,2,2)$ oznaczamy przez $O(f)$. Powiemy, że f i g są liniowo równoważne, jeśli istnieje $\alpha \in \mathcal{GA}$, że $g = \alpha f$, tzn. $g \in O(f)$. Podamy pełną klasyfikację kwadratowych odwzorowań wielomianowych $\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^3$ względem liniowej równoważności oraz wyznaczymy wymiary wszystkich orbit w $\Omega(2,2,2)$. Ponadto, pokażemy, że istnieje orbita gęsta w $\Omega(2,2,2)$.

O LICZBACH PERMUTACJI BĘDĄCYCH ILOCZYNAMI ROZŁĄCZNYCH CYKLI DŁUGOŚCI D

Piotr Miska
Uniwersytet Jagielloński w Krakowie
piotr.miska@uj.edu.pl

W pracy [1] T. Amdeberhan i V. Moll badali tożsamości kombinatoryczne, waluacje 2-adyczne i asymptotykę liczb inwolucji $H_2(n)$, tzn. liczb takich permutacji σ zbioru n-elementowego, że σ^2 jest identycznością.

Zauważmy, że permutacje będące inwolucjami dają się przedstawić w postaci iloczynów rozłącznych transpozycji. Naturalnym staje się wówczas pytanie o własności arytmetyczne liczb $H_d(n)$ permutacji zbioru n-elementowego, które są iloczynami rozłącznych cykli długości d (gdzie d jest ustaloną liczbą naturalną większą od 1). W niniejszym referacie omówię wyniki dotyczące liczb $H_d(n)$: okresowość ciągów $(H_d(n) \pmod{p^r})_{n\in\mathbb{N}}$, gdzie p jest liczbą pierwszą, natomiast r dodatnią liczbą naturalną, waluacje p-adyczne, a także własności pewnych wielomianów powiązanych z funkcjami tworzącymi ciągów $(H_d(n))_{n\in\mathbb{N}}$, $d \geq 2$.

Referat jest oparty na pracy przygotowanej wspólnie z Maciejem Ulasem.

[1] T. Amdeberhan, V.H. Moll, *Involutions and their progenies*, J. Comb. 6(4) (2015), 483-508.

DUALNOŚĆ DLA TRÓJKĄTÓW DIADYCZNYCH

Anna Mućka
Politechnika Warszawska
Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych
a.mucka@mini.pw.edu.pl

Referat jest kontynuacją referatu "Dualność dla przedziałów diadycznych". Trójkątem diadycznym nazywamy przecięcie rzeczywistego trójkąta o wierzchołkach o współrzędnych diadycznych z przestrzenią $\mathbb{D}^2$. Każdy trójkąt diadyczny jest izomorficzny z dokładnie jednym trójkątem w tzw. postaci reprezentującej. Dla kategorii trójkątów diadycznych skonstruujemy, podobnie jak w przypadku przedziałów, dualność przez obiekt schizofreniczny, którym ponownie jest diadyczny odcinek jednostkowy. Przestrzenie dualne do trójkątów diadycznych są podgrupoidami kostki diadycznej z dodatkowymi operacjami stałymi. Skonstrujemy również izomorficzne im zbiory wypukłe dające inny sposób opisu przestrzeni reprezentacji.

[1] K. Matczak, A. Romanowska, J.D.H. Smith, *Dyadic polygons*, Int. J. of Algebra and Computation **21** (2011), 387–408.

[2] A.B. Romanowska, P. Ślusarski and J.D.H. Smith, *Duality for convex polytopes*, J. Austr. Math. Soc. **86** (2009), 399–412.

TWIERDZENIE O DOMKNIĘTOŚCI NAD CIAŁAMI HENSELOWSKIMI I JEGO ZASTOSOWANIA

Krzysztof Jan Nowak
Instytut Matematyki
Uniwersytetu Jagiellońskiego
nowak@im.uj.edu.pl

W referacie nakreślę rozwijaną przeze mnie geometrię podzbiorów algebraicznych w K^n nad dowolnymi ciałami henselowskimi K. Jest to kontynuacja mojego wcześniejszego artykułu, poświęconego geometrii algebraicznej nad ciałami rangi 1, która wymaga jednak nowego podejścia i użycia bardziej złożonych technik. W centrum uwagi znajduje się ponownie twierdzenie o domkniętości (rzutowania $K^n \times \mathbb{P}^m(K) \to K^n$ są definiowalnie domknięte). Pozwala ono na stosowanie desyngularyzacji w sposób podobny jak nad ciałami lokalnie zwartymi. Wykorzystując twierdzenie o domkniętości, można udowodnić m.in. różne wersje wyboru łuku, nierówności Łojasiewicza czy też kawałkami ciągłość funkcji definiowalnych i hölderowość funkcji ciągłych na domkniętych podzbiorach w K^n.

LICZBA I ZNAKI OSTRZY ODWZOROWAŃ Z ROZMAITOŚCI DWUWYMIAROWYCH W PŁASZCZYZNĘ

Aleksandra Nowel

Instytut Matematyki, Wydział Matematyki, Fizyki i Informatyki, Uniwersytet Gdański
Aleksandra.Nowel@mat.ug.edu.pl

Niech $M \subset \mathbb{R}^{n+2}$ będzie dwuwymiarową gładką rozmaitością, która jest przecięciem zupełnym. Pokażemy, jak sprawdzić, czy odwzorowanie $f\colon M \longrightarrow \mathbb{R}^2$ jest 1–generyczne i czy zbiór jego punktów osobliwych składa się tylko z ostrzy i fałd (a jeśli tak, to czy dany punkt osobliwy jest ostrzem czy fałdą). Dla odwzorowań wielomianowych posiadających te własności podamy efektywne metody wyznaczenia liczby dodatnich i ujemnych ostrzy (zob. [3]) z wykorzystaniem sygnatur pewnych form kwadratowych. W [1] autorzy podali metody dla przypadku $M = \mathbb{R}^2$.

Praca wspólna z Iwoną Krzyżanowską.

[1] I. Krzyżanowska, Z. Szafraniec, *On polynomial mappings from the plane to the plane*, J. Math. Soc. Japan **66** no. 3 (2014), 805–818.

[2] Z. Szafraniec, *Topological degree and quadratic forms,* J. Pure Appl. Algebr. **141** (1999), 299–314.

[3] H. Whitney, *On singularities of mapping of Euclidean spaces. I. Mappings of the plane into the plane,* Ann. Math. **62** no. 3 (1955), 374–410.

AUTOMORFIZMY WIELOMIANOWE PŁASZCZYZNY

Arkadiusz Płoski
Politechnika Świętokrzyska
matap@tu.kielce.pl

Niech k będzie ciałem algebraicznie domkniętym dowolnej charakterystyki. Automorfizmem wielomianowym płaszczyzny k^2 nazywamy odwzorowanie wielomianowe $F = (F_1, F_2) : k^2 \to k^2$, takie że F^{-1} istnieje i jest również odwzorowaniem wielomianowym (c.f. [2] i [5], gdzie podane są podstawowe własności automorfizmów). W 1953 van der Kulk [4] udowodnił, że stopień jednej ze składowych F_1, F_2 automorfizmu wielomianowego dzieli stopień drugiej (odpowiednik tego twierdzenia dla zanurzeń wielomianowych prostej w płaszczyznę udowodnili Abhyankar i Moh [1]). Z faktu tego wynika podstawowe twierdzenie Junga o strukturze grupy automorfizmów. Naszym celem jest pokazanie, że twierdzenie van der Kulka jest konsekwencją lokalnego twierdzenia o krotności przecięcia krzywych $F_1 = 0$ i $F_2 = 0$ w ich wspólnym punkcie w nieskończoności w domknięciu rzutowym płaszczyzny k^2. Następnie podamy charakteryzację osobliwości w nieskończoności krzywych afinicznych będących obrazem prostej poprzez automorfizm wielomianowy [3].

[1] S.S. Abhyankar, T. Moh, *Embeddings of the line in the plane*, J. reine angew. Math. **276** (1975), 148–166.

[2] A. van den Essen, *Polynomial Automorphisms (and the Jacobian Conjecture)*, Vol. 190, Progress in Math., Birkhäuser, 2000.

[3] E.R. García Barroso, J. Gwoździewicz, A. Płoski, *Semigroups corresponding to branches at infinity of coordinate lines in the affine plane*, Semigroups Forum, **92**, (2016), 534–540.

[4] W. van der Kulk, *On polynomial rings in two variables*, Nieuw Arch. Wiskd. **3(1)**, (1953), 33–41.

[5] K. Rusek, *Polynomial Automorphisms*, Preprint 456, Institute of Mathematics, Polish Academy of Sciences, May 1989.

ALGEBRY MULTIPLIKATORÓW OKREŚLONE PRZEZ PRZESUNIĘCIA WAŻONE NA DRZEWACH SKIEROWANYCH

Marek Ptak

Uniwersytet Rolniczy w Krakowie

rmptak@cyf-kr.edu.pl

Na drzewie skierowanym V można zdefiniować przestrzeń Hilberta $\ell^2(V)$, analogicznie jak definiuje się przestrzeń $\ell^2(\mathbb{N})$ na zbiorze liczb naturalnych. Również analogicznie można określić przesunięcie ważone S_λ na przestrzeni $\ell^2(V)$, jak klasycznie określone jest przesunięcie (ważone) na przestrzeni $\ell^2(\mathbb{N})$. Sytuacja jest dużo ciekawsza od klasycznej ze względu na możliwą bogatą strukturę drzew skierowanych. Określona zostanie algebra multiplikatorów podyktowana przez przesunięcie ważone S_λ. Przedstawione zostaną własności algebraiczne i topologiczne tej algebry. Wyniki pochodzą z pracy [1], [2] uzyskane wspólnie z ich pozostałymi autorami.

[1] P. Budzyński, P. Dymek, M. Ptak, *Analytic structure of weighted shifts on directed trees*, Math. Nachrichten, to appear.

[2] P. Budzyński, P. Dymek, A. Płaneta, M. Ptak, *Weighted shifts on directed trees. Their multiplier algebras, reflexivity and decompositions*, preprint.

O NIERÓWNOŚCIACH SYMETRYCZNYCH DLA KROTNOŚCI HILBERTA-SAMUELA

Tomasz Rodak
Uniwersytet Łódzki, Wydział Matematyki i Informatyki
rodakt@math.uni.lodz.pl

Wiadomo, że krotność Hilberta-Samuela spełnia nierówność Brunna-Minkowskiego [2]: jeśli $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ są ideałami $\mathfrak{m}$-prymarnymi lokalnego pierścienia noetherowskiego $(R, \mathfrak{m})$ wymiaru d, to

$$e(\mathfrak{a}\mathfrak{b})^{\frac{1}{d}} \leqslant e(\mathfrak{a})^{\frac{1}{d}} + e(\mathfrak{b})^{\frac{1}{d}}.$$

Podczas referatu pokażemy, jak łącząc powyższą nierówność i pojęcie wypukłości w sensie Schura [1], wyprowadzić szereg nierówności na krotność.

Podstawą referatu jest praca wspólna z S. Brzostowskim.

[1] A.W. Marshall, I. Olkin, B.C. Arnold, *Inequalities: theory of majorization and its applications*, Springer Series in Statistics, **2**, Springer, New York, 2011.

[2] D. Rees, R.Y. Sharp, *On a Theorem of B. Teissier on Multiplicities of Ideals in Local Rings*, J. London Math. Soc. (2), **18** (3), 449–463 (1978).

KILKA UWAG O WIELOMIANIE CHARAKTERYSTYCZNYM I ZWIĄZANYCH Z NIM ZBIORACH MACIERZY

MARCIN SKRZYŃSKI
Instytut Matematyki Politechniki Krakowskiej
pfskrzyn@cyf-kr.edu.pl

W referacie omówimy pewne podstawowe wyniki (i całkiem klasyczne, i nowsze) dotyczące algebraicznych i geometrycznych własności wielomianu charakterystycznego macierzy. Zaczniemy od twierdzenia o niezmiennikach działania pełnej grupy liniowej na przestrzeni macierzy przez sprzężenia, a skończymy na twierdzeniu Heltona-Rosenthala-Wanga o obrazach podprzestrzeni afinicznych przez odwzorowanie charakterystyczne i na związanym z tym twierdzeniem pojęciu zbioru osobliwego.

WALUACJA 2-ADYCZNA UOGÓLNIONYCH CIĄGÓW FIBONACCIEGO

Bartosz Sobolewski
Instytut Matematyki, Uniwersytet Jagielloński
bartosz.sobolewski@doctoral.uj.edu.pl

Część z omawianych w referacie wyników pojawia się w mojej pracy [4].

Dla ustalonego $k \geq 2$ zdefiniujmy uogólniony ciąg Fibonacciego $\{t_k(n)\}_{n\geq 0}$ za pomocą rekurencji

$$t_k(n+k) = \sum_{i=0}^{k-1} t_k(n+i),$$

gdzie $t_k(0), \dots, t_k(k-1)$ są ustalone całkowite. Pokażę dla $p = 2$ metodę wyznaczania waluacji p-adycznej wyrazów ciągu $\{t_k(n)\}_{n\geq 0}$ i zaproponuję jej uogólnienie dla dowolnej liczby pierwszej p. W szczególności, podam *explicite* pełny wzór na $\{\nu_2(t_k(n))\}_{n\geq 0}$ dla ciągu o wyrazach początkowych $t_k(0) = 0, t_k(1) = \dots = t_k(k-1) = 1$, gdzie k jest dowolne parzyste, oraz częściowy wzór dla k nieparzystego. Podobny problem był już wcześniej rozważany przez Lengyela i Marquesa [1, 2] dla $k \in \{3, 4, 5\}$.

Następnie zaprezentuję zastosowanie uzyskanych rezultatów do efektywnego rozwiązywania równań diofantycznych typu

$$\prod_{j=1}^{d} t_k(n_j) = m!$$

ze względu na $n_1, \dots, n_d, m$ przy ustalonej wartości $d \geq 1$.

Zwrócę też uwagę na związek zaprezentowanych wyników z ciągami p-regularnymi. Przez ciąg p-regularny o wartościach w $\mathbb{Q}$ rozumiemy taki ciąg $\{a(n)\}_{n\geq 0}$, że $\mathbb{Z}$-moduł generowany przez jego p-jądro, zdefiniowane jako

$$\left\{ \{a(p^i n + j)\}_{n\geq 0} : i \geq 0, 0 \leq j < p^i \right\},$$

jest skończenie generowanym $\mathbb{Z}$-modułem. W kontekście tematyki referatu szczególnie interesujący jest rezultat Shu i Yao [3], którzy podali warunek wystarczający, aby dla zadanej rekurencji $x(n+2) = Ax(n+1) + Bx(n)$ ciąg $\{\nu_p(x(n))\}_{n\geq 0}$ był p-regularny.

[1] D. Marques, T. Lengyel, *The 2-adic order of some generalized Fibonacci numbers*, Integers: Electronic Journal of Combinatorial Number Theory **17** (2017), A5.

[2] D. Marques, T. Lengyel, *The 2-adic order of the Tribonacci Numbers and the equation $T_n = m!$*, J. Integer Seq. **17** (2014), Article 14.10.1.

[3] Z. Shu, J.-Y. Yao, *Analytic functions over $\mathbb{Z}_p$ and p-regular sequences*, C. R. Math. **349** (2011), 947–952.

[4] B. Sobolewski, *The 2-adic valuation of generalized Fibonacci sequences with an application to certain diophantine equations*, preprint: arXiv:1702.05819v1 (2017).

GRUPY SKOŃCZONE Z WŁASNOŚCIĄ PP-BAZOWĄ

Agnieszka Stocka
Instytut Matematyki, Uniwersytet w Białymstoku
stocka@math.uwb.edu.pl

Niech G będzie grupą skończoną. Element grupy G, którego rząd jest potęgą liczby pierwszej, będziemy nazywać *pp-elementem*. Powiemy, że grupa G ma własność:

- $\mathcal{B}$ ($\mathcal{B}_{pp}$), jeśli wszystkie jej minimalne zbiory generatorów (pp-generatorów) są równoliczne,
- *bazową* (*pp-bazową*), jeśli wszystkie jej podgrupy mają własność $\mathcal{B}$ ($\mathcal{B}_{pp}$).

Pierwsze rezultaty dotyczące grup z własnością bazową pojawiły się w pracy [1]. Opis wszystkich grup skończonych z tą własnością można znaleźć w pracach [4] i [2]. Celem referatu jest przedstawienie opisu grup skończonych z własnością pp-bazową. Prezentowane rezultaty pochodzą z pracy [3].

[1] P.R. Jones, *Basis properties for inverse semigroups*, J. Algebra **50** (1978), 135–152.

[2] J. Krempa, A. Stocka, *On some sets of generators of finite groups*, J. Algebra **405** (2014), 122–134.

[3] J. Krempa, A. Stocka, *On finite groups with pp-basis property*, Bull. Aust. Math. Soc. **91(2)** (2015), 241-249.

[4] J. McDougall-Bagnall, M. Quick, *Groups with the basis property*, J. Algebra **346** (2011), 332–339.

O WALUACJACH 2-ADYCZNYCH WSPÓŁCZYNNIKÓW CAŁKOWITYCH POTĘG SZEREGÓW FORMALNYCH

Maciej Ulas

Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Jagielloński

maciej.ulas@uj.edu.pl

Niech $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem Prouheta-Thuego-Morse'a zadanym rekurencyjnie wzorami

$$t_0 = 1, \quad t_{2n} = t_n, \quad t_{2n+1} = -t_n,$$

zaś $T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} t_n x^n$ oznacza jego funkcję tworzącą. Euler rozważał ciąg dodatnich liczb całkowitych $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, występujący w rozwinięciu

$$T(x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n.$$

Liczba b_n ma naturalną interpretację kombinatoryczną i daje liczbę partycji n na skończone sumy potęg liczby 2. Churchhouse wykazał, że $\nu_2(b_n) = \frac{1}{2}(|t_n - 2t_{n-1} + t_{n-2}|)$ dla $n \geq 2$. Innymi słowy, mamy dokładne wyrażenie na 2-adyczną waluację liczby b_n. Wynik ten jest punktem wyjścia do badania współczynników w rozwinięciu funkcji

$$T(x)^{-m} = \sum_{n=0}^{\infty} b_m(n) x^n,$$

gdzie $m \in \mathbb{N}_+$ jest ustalone. Tym razem liczba $b_m(n)$ jest równa liczbie partycji n na skończone sumy potęg liczby 2, przy czym każdy ze składników w sumie może przyjmować jeden z m kolorów. W pierwszej części wykładu pokażę, w jaki sposób można uogólnić wynik Chourchhousa dla ciągu partycji binarnych dla $m = 2^s - 1$, $s \geq 1$, wyznaczając jawny wzór na $\nu_2(b_m(n))$.

W drugiej części wykładu zajmę się ogólnym problemem dotyczącym wyznaczania 2-adycznych waluacji współczynników rozwinięć całkowitych potęg pewnych szeregów potęgowych o współczynnikach $\{-1, 1\}$. Dokładniej, niech $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n x^n \in \mathbb{Z}[[x]]$ i przypuśćmy, że $\epsilon_n \in \{-1, 1\}$. Zaprezentuję kryterium, które przy pewnych dodatkowych założeniach dotyczących ciągu $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pozwala na dokładne wyznaczenie ciągu 2-adycznych waluacji współczynników rozwinięcia szeregu potęgowego

$$F(x)^m = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_m(n) x^n,$$

gdzie $m \in \mathbb{Z}$ jest ustalone.

NIEZDEGENEROWANY SKOK LICZBY MILNORA DLA OSOBLIWOŚCI BRIESKORNA-PHAMA

Justyna Walewska
Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Łódzki
walewska@math.uni.lodz.pl

Skok liczby Milnora izolowanej osobliwości f_0 jest minimalną niezerową różnicą pomiędzy liczbą Milnora osobliwości f_0 a liczbą Milnora jednej z jej deformacji f_s. W przypadku, gdy deformacja jest niezdegenerowana, skok ten jest nazywany skokiem niezdegenerowanym f_0. Podajemy indukcyjny algorytm na obliczanie skoku niezdegenerowanego dla dogodnej osobliwości f_0 z jedną $n-1$ wymiarową ścianą jej diagramu Newtona. Prezentowane wyniki są wspólne z Tadeuszem Krasińskim.

[1] T. Krasiński, J. Walewska *Non-degenerate jump of Milnor numbers of Brieskorn-Pham singularities* (wysłana do Topology and its Applications).

O GRUPACH ADDYTYWNYCH (ŁĄCZNYCH) PIERŚCIENI PRZEMIENNYCH

Mateusz Woronowicz
Uniwersytet w Białymstoku
mworonowicz@math.uwb.edu.pl

Jednym z podstawowych zagadnień związanych z badaniem grup addytywnych pierścieni jest problem opisu grup abelowych, które wraz z dowolnym określonym na nich dwuliniowym działaniem tworzą pierścień należący do ustalonej klasy. Do najważniejszych klas pierścieni z pewnością można zaliczyć klasę pierścieni przemiennych. Naturalne wydają się więc badania dotyczące struktury grup abelowych będących grupami addytywnymi wyłącznie takich pierścieni. Studiowanie sygnalizowanego zagadnienia zainicjował S. Feigelstock w pracy *Additive groups of commutative rings* (zob. [6]). Obiekt swych badań określił mianem CR-grupy. Wprowadził on także pojęcie ACR-grupy, czyli grupy abelowej spełniających warunek CR ograniczony do klasy pierścieni łącznych, oraz wykazał, że CR-grupy stanowią właściwą podklasę klasy ACR-grup. Badania Feigelstocka kontynuowali R.R. Andruszkiewicz i M. Woronowicz, co zaowocowało publikacją *On additive groups of associative and commutative rings* (zob. [3]), zawierającą uzupełnienia rezultatów osiągniętych przez Feigelstocka oraz nowe wyniki dotyczące zwłaszcza grup addytywnych łącznych pierścieni przemiennych.

W trakcie referatu zostaną krótko omówione najważniejsze twierdzenia pochodzące z dwóch wspomnianych wyżej prac. Ponadto przedstawione zostaną liczne przykłady $(A)CR$-grup oraz zastosowania prezentowanej teorii do opisu TI-grup, czyli grup abelowych, które wraz z dowolnym łącznym rozdzielnym względem dodawania mnożeniem tworzą pierścień filialny.

[1] R.R. Andruszkiewicz, *The classification of integral domains in which the relation of being an ideal is transitive*, Comm. Algebra **31** (2003), 2067–2093.

[2] R.R. Andruszkiewicz, M. Woronowicz, *On TI-groups*, Recent Results in Pure and Applied Mathematics, Podlasie 2014 (A. Gomolińska, A. Grabowski, M. Hryniewicka, M. Kacprzak, E. Schmeidel Ed(s).), Białystok Technical University Publishing Office, 2014, 33–41.

[3] R.R. Andruszkiewicz, M. Woronowicz, *On additive groups of associative and commutative rings*, Quaest. Math. (2017), (in print).

[4] S. Feigelstock, *Additive groups of rings. Vol. 1*, Pitman Advanced Publishing Program, Boston, 1983.

[5] S. Feigelstock, *Additive groups of rings. Vol. 2*, Research Notes in Mathematics 169, Longman, London, 1988.

[6] S. Feigelstock, *Additive groups of commutative rings*, Quest. Math. **23** (2000), 241–245.

[7] L. Fuchs, *Infinite abelian groups volume 1*, Academic Press, New York, London, 1970.

[8] L. Fuchs, *Infinite abelian groups volume 2*, Academic Press, New York, London, 1973.

[9] M. Woronowicz, *A note on additive groups of some specific associative rings*, Ann. Math. Sil. **30** (2016), no. 1, 219–229.

ON SOME CANCELLATION ALGORITHMS (ALGORYTMY SITOWE)

Maciej Zakarczemny
Politechnika Krakowska
mzakarczemny@pk.edu.pl

Definiuję $b_f(n)$ jako najmniejszą $d \in \mathbb{N}$ taką, że liczby $f(n_1, n_2, \ldots, n_m)$, gdzie $n_1 + n_2 + \ldots + n_m \leq n$ są niepodzielne przez d. Dla wybranych funkcji $f : \mathbb{N}^m \to \mathbb{N}$ znajdę wartości elementów ciągu $(b_f(n))_{n\in\mathbb{N}}$ lub podam inną jego charakteryzację.
Browkin i Cao [3] pokazali, że dla funkcji $f : \mathbb{N}^2 \ni (n_1, n_2) \to n_1^2 + n_2^2 \in \mathbb{N}$, ciąg $(b_f(n))_{n\in\mathbb{N}}$ to rosnący ciąg kolenych bezkwadratowych liczb naturalnych, będących iloczynami liczb pierwszych przystających do 3 modulo 4.
W swoim refaracie przedstawię wyniki z trzech prac [9], [10],[11], dotyczące następujących funkcji:

$$f_1(n_1) = n_1^k, k \geq 2,\ f_2(n_1, n_2, \ldots, n_m) = n_1 n_2 \cdot \ldots \cdot n_m,\ m \geq 2,\ f_3(n_1, n_2, n_3) = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2,$$

$$f_4(n_1, n_2, n_3, n_4) = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 + n_4^2,\ f_5(n_1, n_2) = n_1^j + n_2^j,\ j > 3, \text{ nieparzyste.}$$

Dla funkcji $f : \mathbb{N}^2 \ni (n_1, n_2) \to n_1^3 + n_2^3 \in \mathbb{N}$, charakteryzacja ciągu $(b_f(n))_{n\in\mathbb{N}}$ może być podana używając wielomianów permutacyjnych skończonego, przemiennego, pierścienia ilorazowego $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. W szczególnych przypadkach funkcji f podam dolne i górne ograniczenia na wartości elementów ciągu $(b_f(n))_{n\in\mathbb{N}}$.

[1] L.K. Arnold, S.J. Benkoski and B.J. McCabe, *The discriminator (a simple application of Bertrand's postulate)*, Amer. Math. Monthly **92** (1985), 275-277.

[2] P. S. Bremser, P.D. Schumer, L.C. Washington, *A note on the incongruence of consecutive integers to a fixed power*, J. Number Theory **35** (1990), 105-108.

[3] J. Browkin, H-Q. Cao, *Modifications of the Eratosthenes sieve*, Colloq. Math. **135** (2014), 127-138.

[4] S. Haque and J. Shallit *Discriminators and k-regular sequences* INTEGERS **16** (2106), Paper A76.

[5] P. Moree and G.L. Mullen, *Dickson polynomial discriminators*, J. Number Theory **59** (1996), 88-105.

[6] P. Moree and A. Zumalacaárregui, *Salajan's conjecture on discriminating terms in an exponential sequence*, J. Number Theory **160** (2016), 646-665.

[7] W. Sierpiński, *Elementary Theory of numbers*, Ed. by A. Schinzel, North-Holland (1988).

[8] Zhi-Wei Sun, *On funtions taking only prime values*, J. Number Theory **133** (2013), 2794-2812.

[9] A. Tomski, M. Zakarczemny, *On some cancellation algorithms*, NNTDMM **23** (2017), 101-114.

[10] M. Zakarczemny, *On some cancellation algorithms, II*, CzT to appear.

[11] M. Zakarczemny, *On some cancellation algorithms, III*, to appear.

[10] M. Zieve, *A note on the discriminator*, J. Number Theory **73** (1998), 122-138.

PORÓWNANIE RÓŻNYCH KONSTRUKCJI UOGÓLNIONYCH NAKRYĆ OPARTYCH NA UNIWERSALNEJ PRZESTRZENI ŚCIEŻEK

Andreas Zastrow
Instytut Matematyki, Uniwersytet Gdański
zastrow@mat.ug.edu.pl

Pomysł, aby uogólnić teorię nakryć, jest dość stary. Pierwszą pracę proponującą konstrukcję w tym sensie napisano już w latach sześćdziesiątych XX w. Odtąd, zależnie od tego, jakie własności klasycznych nakryć powinny być utrzymane, a z jakich można zrezygnować, przedstawiono kilka nierównoważnych definicji. Jedna z nich oparta jest na pomyśle wykorzystania w zasadzie tej samej, co w klasycznym przypadku, konstrukcji przez „uniwersalną przestrzeń ścieżek" [2] i jednoczesnym zaakceptowaniu przestrzeni spełniających słabsze warunki. W tej koncepcji dotyczącej uogólnionych przestrzeni nakrywających, dla których proponowano różne sposoby zdefiniowania topologii, istotne było to, by w klasycznym lokalnie łukowo spójnym i półlokalnie jednospójnym przypadku otrzymywać tę samą topologię klasycznych przestrzeni nakrywających. Podprzestrzeń uniwersalnej przestrzeni ścieżek zawierająca te ścieżki, które wracają do punktu bazowego, jest grupą podstawową, która począwszy od pracy Bissa ([1]) z 2002 r. jest rozpatrywana jako obiekt mający oprócz swojej algebraicznej struktury również strukturę topologiczną. Praca Bissa, chociaż zawiera kilka błędów, może dlatego liczyć się jako wpływowa; a obiekt zaproponowany przez niego, grupa podstawowa topologiczna, był odtąd dyskutowany w kilku pracach i uogólniony do wyższych wymiarów (chociaż teraz znany jest jako grupa quasitopologiczna). Znamy co najmniej pięć różnych definicji pozwalających topologizować uniwersalną przestrzeń ścieżek celem otrzymania uogólnionych przestrzeni nakrywających. Pierwsze trzy z tych topologii, pochodzące z prac [1], [2] & [4], już porównane w pracy [5]; i, o ile to nie było proponowane w oryginalnej definicji, rozszerzony od grupy podstawowej do uogólnionej przestrzeni ścieżek. Głównym celem tego referatu będzie przedstawienie definicji czwartej topologii, jej rozszerzenia do uogólnionej przestrzeni ścieżek, i wyniki porównywania tej topologii z tymi, które już były dyskutowane w pracy [5]. To jest nową wspólną pracą z Žigą Virkiem (IST Austria) [6]. Ta czwarta topologia była dla grupy podstawowej skonstruowana w pracy [7] przez Brazasa jako słabsza od topologii Bissa, ale wśród tych najbogatsza, która upewnia, że grupa podstawowa jeszcze będzie grupą topologiczną. Wyniki z pracy [5] będę do pewnego stopnia powtarzać, a, o ile czasu wystarczy, mogę też dołączyć do referatu moją oryginalną motywowację, aby skonstruować uogólnione przestrzenie nakrywające z pracy [3], która była zagadnieniem algebraicznym.

[1] D.K. Biss, *The topological fundamental group and generalized covering spaces*, Topology Appl. **124** (2002), 355–371.

[2] W.A. Bogley, A.J. Sieradski, *Universal path spaces*, preprint; http://oregonstate.edu/∼bogleyw/.

[3] H. Fischer, A. Zastrow, *Generalized universal covering spaces and the shape group*, Fund. Math. **197** (2007), 167–196.

[4] N. Brodsky, J. Dydak, B. Labuz, A. Mitra, *Covering maps for locally path connected spaces*, Fund. Math. **218** (2012), 13–46

[5] Ž. Virk, A. Zastrow, *The comparison of topologies related to various concepts of generalized covering spaces*, Topology Appl. **170** (2014), 52–62.

[6] Ž. Virk, A. Zastrow, *A new topology on the universal covering space*, preprint w przygotowaniu.

[7] J. Brazas, *The fundamental group as a topological group*, Topology Appl. **160** (2013), 170–188.

NOWE PODEJŚCIE DO FORM NORMALNYCH PŁASKICH PÓL WEKTOROWYCH

Henryk Żołądek
Uniwersytet Warszawski
zoladek@mimuw.edu.pl

Podstawowym problemem przy redukcji kiełka V pola wektorowego w punkcie osobliwym przy pomocy kiełków lokalnych dyfeomorfizmów jest opisanie obrazu operatora dołączonego ad_V na przestrzeni formalnych pól wektorowych. Wraz z E. Stróżyną rozwinęliśmy nową metodę rozwiązania tego problemu w 2-wymiarowym przypadku. Polega ona na zredukowaniu go do dwóch 1-wymiarowych zagadnień. Dokładniej, rozkładamy formalne pola wektorowe na część transwersalną do V i na część styczną do V. Obrazy odpowiednich 1-wymiarowych operatorów okazują się być opisane w terminach okresów pewnych całek Schwarza-Christoffela.

Stosując nasze podejście, rozwiązaliśmy stary problem uzupełnienia formy normalnej Takensa dla nilpotentnych osobliwości. Ponadto, ostatnio udało się uzyskać kompletną listę normalnych form dla osobliwości z jednorodną kwadratową częścią wiodącą.