IV Ogólnopolska Konferencja Naukowa

OBLICZA ALGEBRY

Kraków, 27–30 maja 2021

Książeczka abstraktów

Zaproszeni Wykładowcy:

prof. dr hab. Janusz Czelakowski (Uniwersytet Opolski)
prof. dr hab. Piotr Kowalski (Uniwersytet Wrocławski)
prof. dr hab. Agata Smoktunowicz (The University of Edinburgh)
prof. dr hab. Tomasz Szemberg (Uniwersytet Pedagogiczny w Krakowie)
prof. dr hab. Piotr Śniady (Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk)
dr Bartosz Naskręcki (Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu)
dr inż. Roksana Słowik (Politechnika Śląska)
dr Agnieszka Stocka (Uniwersytet w Białymstoku)

Komitet Naukowy:

prof. dr hab. Wojciech Kucharz (Uniwersytet Jagielloński)
prof. dr hab. Andrzej Nowicki (Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu)
prof. dr hab. Kamil Rusek (Uniwersytet Pedagogiczny w Krakowie)
prof. dr hab. Stanisław Spodzieja (Uniwersytet Łódzki)
dr hab. Katarzyna Korwin-Słomczyńska (Uniwersytet Pedagogiczny w Krakowie)

Komitet Organizacyjny:

dr Łucja Farnik (Uniwersytet Pedagogiczny w Krakowie)
dr Beata Gryszka (Uniwersytet Pedagogiczny w Krakowie)
dr Karol Gryszka (Uniwersytet Pedagogiczny w Krakowie)
mgr Marek Janasz (Uniwersytet Pedagogiczny w Krakowie)
dr Grzegorz Malara (Uniwersytet Pedagogiczny w Krakowie)
dr Sławomir Przybyło (Uniwersytet Pedagogiczny w Krakowie)
dr Paweł Solarz (Uniwersytet Pedagogiczny w Krakowie)
dr Justyna Szpond (Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk)

Lista uczestników:

1. Elżbieta Adamus, Akademia Górniczo-Hutnicza, Kraków
2. Czesław Bagiński, Politechnika Białostocka, Białystok
3. Juliusz Banecki, Gdańskie Liceum Autonomiczne, Gdańsk
4. Radomił Baran, Uniwersytet Jagielloński, Kraków
5. Jakub Byszewski, Uniwersytet Jagielloński, Kraków
6. Tymoteusz Chmiel, Uniwersytet Jagielloński, Kraków
7. Janusz Czelakowski, Uniwersytet Opolski, Opole
8. Mawunyo Kofi Darkey-Mensah, Uniwersytet Śląski, Katowice
9. Karolina Dądela, Uniwersytet Jagielloński, Kraków
10. Monika Drzewiecka, Politechnika Śląska, Gliwice
11. Łucja Farnik, Uniwersytet Pedagogiczny, Kraków
12. Krystian Gajdzica, Uniwersytet Jagielloński, Kraków
13. Filip Gawron, Uniwersytet Jagielloński, Kraków
14. Jakub Gismatullin, Uniwersytet Wrocławski & IMPAN, Wrocław
15. Beata Gryszka, Uniwersytet Pedagogiczny, Kraków
16. Karol Gryszka, Uniwersytet Pedagogiczny, Kraków
17. Piotr Grzeszczuk, Politechnika Białostocka, Białystok
18. Zbigniew Hajto, Uniwersytet Jagielloński, Krakow
19. Waldemar Hołubowski, Politechnika Śląska, Gliwice
20. Małgorzata Hryniewicka, Uniwersytet w Białymstoku, Białystok
21. Marek Janasz, Uniwersytet Pedagogiczny, Kraków
22. Małgorzata Jastrzębska, Uniwersytet Przyrodniczo-Humanistyczny, Siedlce
23. Tomasz Jędrzejak, Uniwersytet Szczeciński, Szczecin
24. Piotr Jędrzejewicz, Uniwersytet Mikołaja Kopernika, Toruń
25. Marek Kępczyk, Politechnika Białostocka, Białystok
26. Przemysław Koprowski, Uniwersytet Śląski, Katowice
27. Katarzyna Korwin-Słomczyńska, Uniwersytet Pedagogiczny, Kraków
28. Tomasz Kowalczyk, Uniwersytet Jagielloński, Kraków

29. Agnieszka Kowalska, Uniwersytet Pedagogiczny, Kraków
30. Piotr Kowalski, Uniwersytet Wrocławski, Wrocław
31. Tadeusz Krasiński, Uniwersytet Łódzki, Łódź
32. Jan Krempa, Uniwersytet Warszawski, Warszawa
33. Iwona Krzyżanowska, Uniwersytet Gdański, Gdańsk
34. Wojciech Kucharz, Uniwersytet Jagielloński, Kraków
35. Eryk Tadeusz Lipka, Uniwersytet Pedagogiczny, Kraków
36. Maciej Maciejewski, Uniwersytet Kazimierza Wielkiego, Bydgoszcz
37. Grzegorz Malara, Uniwersytet Pedagogiczny, Kraków
38. Łukasz Matysiak, Uniwersytet Kazimierza Wielkiego, Bydgoszcz
39. Ryszard Mazurek, Politechnika Białostocka, Białystok
40. Piotr Miska, Uniwersytet Jagielloński, Kraków
41. Rouzbeh Mohseni, Uniwersytet Jagielloński, Krakow
42. Karolina Mroczyńska, Uniwersytet Kazimierza Wielkiego, Bydgoszcz
43. Bartosz Naskręcki, Uniwersytet im. Adama Mickiewicza, Poznań
44. Marek Niezgoda, Uniwersytet Pedagogiczny, Kraków
45. Krzysztof Nowak, Uniwersytet Jagielloński, Kraków
46. Marta Nowakowska, Uniwersytet Śląski, Katowice
47. Aleksandra Nowel, Uniwersytet Gdański, Gdańsk
48. Andrzej Nowicki, Uniwersytet Mikołaja Kopernika, Toruń
49. Bartłomiej Pawlik, Politechnika Śląska, Gliwice
50. Artur Piękosz, Politechnika Krakowska, Kraków
51. Piotr Pokora, Uniwersytet Pedagogiczny, Kraków
52. Karol Pryszczepko, Uniwersytet w Białymstoku, Białystok
53. Sławomir Przybyło, Uniwersytet Pedagogiczny, Kraków
54. Kamil Rusek, Uniwersytet Pedagogiczny, Kraków
55. Roksana Słowik, Politechnika Śląska, Gliwice
56. Agata Smoktunowicz, The University of Edinburgh, Edinburgh
57. Bartosz Sobolewski, Uniwersytet Jagielloński, Kraków

58. Stanisław Spodzieja, Uniwersytet Łódzki, Łódź
59. Agnieszka Stocka, Uniwersytet w Białymstoku, Białystok
60. Tomasz Szemberg, Uniwersytet Pedagogiczny, Kraków
61. Justyna Szpond, Polska Akademia Nauk, Kraków
62. Piotr Śniady, Polska Akademia Nauk, Warszawa
63. Maciej Ulas, Uniwersytet Jagielloński, Kraków
64. Andrzej Wiśnicki, Uniwersytet Pedagogiczny, Kraków
65. Mateusz Woronowicz, Politechnika Białostocka, Białystok
66. Andreas Zastrow, Uniwersytet Gdański, Gdańsk
67. Błażej Żmija, Uniwersytet Jagielloński, Kraków

<table>
<tr><th colspan="3">czwartek, 27.05.2021</th></tr>
<tr><td>9:00-10:00</td><td colspan="2">rejestracja uczestników przed Aula A1 (wejście od ul. Adama Chmiela)</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">sala 110N</td></tr>
<tr><td>10:00-10:10</td><td colspan="2">rozpoczęcie konferencji</td></tr>
<tr><td>10:10-11:10</td><td colspan="2">prof. dr hab. Piotr Śniady (IMPAN)
Zaproszenie do kombinatoryki algebraicznej</td></tr>
<tr><td>11:10-11:40</td><td colspan="2">przerwa kawowa</td></tr>
<tr><td>11:40-12:40</td><td colspan="2">prof. dr hab. Janusz Czelakowski (UO)
Teorie równościowe wyznaczone przez algebry dwuelementowe</td></tr>
<tr><td>12:40-14:40</td><td colspan="2">przerwa obiadowa</td></tr>
<tr><td></td><td>sala 110N</td><td>sala 111N</td></tr>
<tr><td>14:40-15:00</td><td>dr Tomasz Kowalczyk (UJ)
O wyższych liczbach pitagorejskich</td><td>dr hab. Ryszard Mazurek (PB)
O pierścieniach archimedesowych</td></tr>
<tr><td>15:10-15:30</td><td>dr hab. Krzysztof Nowak (UJ)
Geometria w strukturach Henselowo minimalnych</td><td>dr Marek Kępczyk (PB)
O charakteryzacji ciał, które są sumami dwóch podciał właściwych</td></tr>
<tr><td>15:40-16:00</td><td>dr Artur Piękosz (PK)
Spektrum rzeczywiste, topologia Grothendiecka i dualność Stone'a</td><td>dr Mateusz Woronowicz (PB)
O grupach addytywnych pierścieni unitarnych</td></tr>
<tr><td>16:00-16:30</td><td colspan="2">przerwa kawowa</td></tr>
<tr><td>16:30-16:50</td><td>prof. dr hab. Tadeusz Krasiński (UŁ)
Wykładnik Łojasiewicza w niezdegenerowanych deformacjach osobliwości powierzchni</td><td>dr Marek Niezgoda (UP)
Przedłużanie wypukłości funkcji G-niezmienniczych z podprzestrzeni na przestrzeń eatonowską</td></tr>
<tr><td>17:00-17:20</td><td>dr Łucja Farnik (UP)
Ograniczenia dolne stałych Seshadriego na powierzchniach o pewnej własności</td><td>dr hab. Andrzej Wiśnicki (UP)
O problemie Kadisona o podobieństwie</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="3">piątek, 28.05.2021</th></tr>
<tr><td colspan="3">sala 110N</td></tr>
<tr><td>9:00-10:00</td><td colspan="2">dr Agnieszka Stocka (UwB)
Minimalne zbiory generatorów grup skończonych</td></tr>
<tr><td>10:00-10:30</td><td colspan="2">przerwa kawowa</td></tr>
<tr><td>10:30-11:30</td><td colspan="2">prof. dr hab. Tomasz Szemberg (UP)
Zbiory punktów w przestrzeniach rzutowych, których generyczne rzutowania są zupełnymi przecięciami</td></tr>
<tr><td>11:40-12:40</td><td colspan="2">prof. dr hab. Agata Smoktunowicz (Uniwersytet Edynburski)
O pewnych zastosowaniach klamerek i ich związkach z innymi dziedzinami algebry</td></tr>
<tr><td>12:40-14:40</td><td colspan="2">przerwa obiadowa</td></tr>
<tr><td></td><td>sala 110N</td><td>sala 111N</td></tr>
<tr><td>14:40-15:00</td><td>mgr Tymoteusz Chmiel (UJ)
Moduły Koszula i ich zastosowania</td><td>lic. Monika Drzewiecka (PŚ)
Automorfizmy generyczne uporządkowania liczb wymiernych</td></tr>
<tr><td>15:10-15:30</td><td>dr hab. Maciej Ulas (UJ)
Równe wartości funkcji zliczających partycje</td><td>dr inż. Bartłomiej Pawlik (PŚ)
Rozszerzenia słów bezkwadratowych</td></tr>
<tr><td>15:40-16:00</td><td>Filip Gawron (UJ)
Problem fosy Gaussa i jego uogólnienia</td><td>dr hab. Przemysław Koprowski (PŚ)
Część anizotropwa formy kwadratowej nad ciałem globalnym</td></tr>
<tr><td>16:00-16:30</td><td colspan="2">przerwa kawowa</td></tr>
<tr><td>16:30-16:50</td><td>dr Jakub Byszewski (UJ)
Automorfizmy skończonego rzędu pierścienia szeregów potęgowych nad ciałem skończonym</td><td>dr hab. Andreas Zastrow (UG)
Parę uwag na temat Grup Archipelagu</td></tr>
<tr><td>17:00-17:20</td><td>Radomił Baran (UJ)
Pokrycia prostokątów przez prostokąty</td><td>prof. dr hab. Zbigniew Hajto (UJ)
Rzeczywiste rozszerzenie Liouville'a dla ciał różniczkowych cząstkowych</td></tr>
</table>

sobota, 29.05.2021		
sala 110N		
9:00-10:00	**dr inż. Roksana Słowik (PŚ)** *O trójkątnych inwolucjach*	
10:00-10:30	przerwa kawowa	
10:30-11:30	**prof. dr hab. Piotr Kowalski (UWr)** *Teoria modeli działań grup na ciałach*	
11:40-12:40	**dr Bartosz Naskręcki (UAM)** *Jedność matematyki: rozmaitości algebraiczne z punktu widzenia analizy, topologii i teorii liczb*	
12:40-14:40	przerwa obiadowa	
	sala 110N	sala 111N
14:40-15:00	**dr Karol Pryszczepko (UwB)** *Wiązary i ich związki z pierścieniami*	**dr Piotr Miska (UJ)** *O gęstości ilorazów wartości form kwadratowych w ciałach liczb p-adycznych*
15:10-15:30	**dr Jakub Gismatullin (UWr&IMPAN)** *O grupach (dualnie) surjunktywnych, hipotezie Kaplanskiego oraz metrycznych ultraproduktach grup*	**mgr Bartosz Sobolewski (UJ)** *Ostatnie niezerowe cyfry wartości wielomianów i p-adycznych funkcji analitycznych*
15:40-16:00	**dr hab. Katarzyna Korwin-Słomczyńska (UP)** *Silny porządek w rozmaitościach fregowskich i jego związek z komutatorem*	**mgr Błażej Żmija (UJ)** *Wielomiany partycji M-arnych*
16:00-16:30	przerwa kawowa	
16:30-16:50	**mgr Łukasz Matysiak (UKW)** *Rozszerzenia ciał a kompozyty wielomianowe*	**mgr Krystian Gajdzica (UJ)** *Specjalne typy wyróżników*
17:00-17:20	**dr hab. Piotr Jędrzejewicz (UMK)** *Pierścienie bez (warunku istnienia) elementów przeciwnych*	**dr hab. Tomasz Jędrzejak (USz)** *Rangi grup Mordella-Weila jakobianów krzywych hipereliptycznych* $y^2 = x^5 + ax$

POKRYCIA PROSTOKĄTÓW PRZEZ PROSTOKĄTY

Radomił Baran
Uniwersytet Jagielloński
radomil.baran@gmail.com

Badamy warunki równoważne na pokrycia prostokątu $1 \times \alpha$ przez prostokąty podobne do prostokątów $1 \times \beta_1, \ldots, 1 \times \beta_n$. W przypadku $n = 1$ jest to równoważne istnieniu funkcji wymiernej $Q(z)$ o współczynnikach wymiernych takiej, że $\alpha = Q(\beta_1)$ oraz Q przekształca półpłaszczyzny $\{z|\Re z < 0\}$ i $\{z|\Re z > 0\}$ w siebie. Prezentujemy również inne warunki równoważne na podaną funkcję wymierną $Q(z)$. W przypadku $n > 1$ pokazujemy dla $\alpha = 1$, czyli dla kwadratu, warunek równoważny na pokrycia za pomocą pewnego warunku na dowolne zanurzenie $\sigma : \mathbb{Q}(\beta_1, \ldots, \beta_n) \to \mathbb{C}$. W dowodzie badamy strukturę zbioru liczb α, dla których prostokąt $1 \times \alpha$ da się pokryć prostokątami $1 \times \beta_1, \ldots, 1 \times \beta_n$ wykorzystując naturalne zanurzenie ciała $\mathbb{Q}(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ w przestrzeń wektorową $\mathbb{R}^r \times \mathbb{C}^s$. Przypadek ogólny $\alpha \neq 1$ nie posiada pełnej odpowiedzi na postawiony problem. Wyniki prezentowane są na podstawie wspólnej pracy z dr. Jakubem Byszewskim.

[1] C. Freiling, M. Laczkovich, D. Rinne, *Rectangling a Rectangle*, Discrete & Computational Geometry **17** (1997), 217–225.

AUTOMORFIZMY SKOŃCZONEGO RZĘDU PIERŚCIENIA SZEREGÓW POTĘGOWYCH NAD CIAŁEM SKOŃCZONYM

Jakub Byszewski
Uniwersytet Jagielloński
jakub.byszewski@gmail.com

Grupa Nottingham (odpowiadająca liczbie pierwszej p) to grupa formalnych szeregów potęgowych postaci $t + a_2t^2 + a_3t^3 + \cdots$ o współczynnikach w ciele p-elementowym wraz z działaniem składania. Wiadomo, że grupa ta posiada elementy rzędu p^n dla każdego $n \geqslant 1$. Elementy rzędu p zostały sklasyfikowane przez Klopscha i mają bardzo ładny opis. Elementy wyższego rzędu są jednak tajemnicze, i jedynie kilka przykładów explicite zadanych elementów tego rodzaju było dotąd znanych, i to jedynie dla $p = 2$ i rzędu 4.

W referacie opowiem, w jaki sposób można opisać takie elementy przy pomocy automatów skończonych. Pozwala nam to skonstruować wiele zadanych explicite przykładów elementów wyższych rzędów. Referat oparty jest na wspólnej pracy z Guntherem Cornelissenem i Djurre Tijsmą.

[1] J. Byszewski, G. Cornelissen, D. Tijsma, *Automata and finite order elements in the Nottingham group*, arXiv:2008.04971.

MODUŁY KOSZULA I ICH ZASTOSOWANIA

Tymoteusz Chmiel
Uniwersytet Jagielloński
tymoteusz.chmiel@gmail.com

Niech $S = \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]$ będzie pierścieniem wielomianów w n zmiennych. Kompleks Koszula

$$\mathcal{K} : 0 \to \bigwedge^n V \otimes S \xrightarrow{\delta_n} \cdots \xrightarrow{\delta_3} \bigwedge^2 V \otimes S \xrightarrow{\delta_2} V \otimes S \xrightarrow{\delta_1} S$$

stanowi minimalną rezolwentę wolną trywialnego S–modułu $\mathbb{C}$, ale jego konstrukcja posiada również liczne inne zastosowania. Jednym z nich jest możliwość zdefiniowana *modułów Koszula* $\mathcal{W}(V, K)$, gdzie $\iota : K \hookrightarrow \bigwedge^2 V$ jest podprzestrzenią liniową, jako modułów o prezentacji:

$$\left(\bigwedge^3 V \oplus K\right) \otimes S \xrightarrow{\delta_3 \oplus \iota} \bigwedge^2 V \otimes S \twoheadrightarrow \mathcal{W}(V, K).$$

Są to niezwykle ciekawe obiekty, a ich badanie łączy w sobie metody algebry przemiennej, geometrii algebraicznej i teorii reprezentacji.

W moim referacie wprowadzę zagadnienie modułów Koszula, zarówno w sytuacji ogólnej, jak i niezmienniczej, tj. gdy przestrzenie V i K są reprezentacjami pewnej półprostej algebry Liego. Zdefiniuję także podstawową rozmaitość algebraiczną powiązaną z modułem Koszula: rozmaitość rezonansu $\mathcal{R}(V, K)$.

Na koniec omówię pokrótce ostatnie wyniki ([2],[3]) dotyczące znikania składowych jednorodnych modułów $\mathcal{W}(V, K)$ w przypadku, gdy są one skończonej długości. Te czysto algebraiczne rezultaty mają niezwykłe implikacje w pozornie odległych dziedzinach. Jednym z nich jest twierdzenie zapewniające górne ograniczenie pewnych topologicznych niezmienników grup skończenie generowanych ([2]). Drugim jest nowy dowód hipotezy Greena dla generycznych krzywych genusu g ([3]).

[1] S. Papadima, A. Suciu, *Vanishing resonance and representations of Lie algebras.* J. Reine Angew. Math. **706** (2015), 83–101.

[2] M. Aprodu, G. Farkas, Ş. Papadima, C. Raicu, J. Weyman, *Topological invariants of groups and Koszul modules*, arxiv:1806.01702.

[3] M. Aprodu, G. Farkas, Ş. Papadima, C. Raicu, J. Weyman, *Koszul modules and Green's conjecture*, Invent. math. **218**, 657–720 (2019).

TEORIE RÓWNOŚCIOWE WYZNACZONE PRZEZ ALGEBRY DWUELEMENTOWE

Janusz Czelakowski
Uniwersytet Opolski, Wydział Matematyki, Fizyki i Informatyki
jczel@uni.opole.pl

Dwuelementowe algebry grają znaczącą rolę w matematyce. Zajmują one centralne miejsce w algebrze i logice. Poświęcono im dużo uwagi. Klasyczna praca Posta [6] podaje opis klonów na zbiorze dwuelementowym i tym samym określa pełną listę algebr dwuelementowych. Kalicki [4] zajmuje się logiką Birkhoffa skojarzoną z algebrami dwuelementowymi oraz opisem maksymalnych teorii równościowych tej logiki. Ważna praca Lyndona [5] zawiera słynne twierdzenie o skończonej bazie aksjomatycznej orzekające, że konsekwencja Birkhoffa skojarzona z dowolną algebrą dwuelementową $\mathbf{2}$ o skończonej sygnaturze jest scharakteryzowana przez *skończony* zbiór aksjomatów równościowych. Innymi słowy, wszystkie identyczności zachodzące w $\mathbf{2}$ można wydedukować z pewnego skończonego zbioru identyczności algebry $\mathbf{2}$ przy pomocy skończonej liczby reguł logiki Birkhoffa. Dowód Lyndona odwołuje się klasyfikacji klonów podanej przez Posta. Berman [1] podał krótki dowód twierdzenia Lyndona wsparty na wynikach algebry ogólnej. Taylor [8] zauważył, że równościowa klasa algebr $\boldsymbol{HSP}(\mathbf{2})$ posiada skończenie dużo algebr podprosto nierozkładalnych i wszystkie one są skończone. Dowód polega na zbadaniu wszystkich klas równościowych generowanych przez algebry dwuelementowe z listy Posta. Berman [1] wzmocnił wynik Taylora wykazując, że dla każdej algebry dwuelementowej $\mathbf{2}$, rozmaitość $\boldsymbol{HSP}(\mathbf{2})$ posiada co najwyżej trzy algebry podprosto nierozkładalne i każda z nich jest mocy co najwyżej 3.

Z drugiej strony, Rautenberg [7] wykazał, że każda zdaniowa operacja konsekwencji wyznaczona przez dwuelementową matrycę logiczną posiada skończoną bazę regułową. Podany przez niego dowód sięga do schematu klasyfikacyjnego Posta [6].

Czelakowski [3] udowodnił, że równościowo określony komutator (zobacz [2]) dla quasi-rozmaitości $\mathbf{Q} = \boldsymbol{SP}(\mathbf{2})$ generowanej przez dowolną algebrę dwuelementową $\mathbf{2}$ spełnia jedno z praw komutatorowych:

$$[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}] = \boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{y} \quad \text{or} \quad [\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}] = \mathbf{0}.$$

Niech τ będzie ustaloną sygnaturą algebraiczną. $\boldsymbol{Te}$ jest absolutnie wolną algebrą termów typu τ. $Eq(\tau)$ jest zbiorem wszystkich równości termów. Jeżeli $\mathbf{K}$ jest klasą algebr o sygnaturze τ, to $\mathbf{K}^{\models}$ jest operacją konsekwencji na $Eq(\tau)$ określoną następująco:

$$p \approx q \in \mathbf{K}^{\models}(X) \Leftrightarrow_{df} (\forall \boldsymbol{A} \in \mathbf{K})(\forall h \in Hom(\boldsymbol{Te}, \boldsymbol{A}))(\boldsymbol{A} \models X[h]) \Rightarrow \boldsymbol{A} \models p \approx q[h]),$$

tzn. w każdej algebrze $\boldsymbol{A} \in \mathbf{K}$ i dla każdego homomorfizmu $h : \boldsymbol{Te} \to \boldsymbol{A}$, jeżeli każda równość z X jest spełniona przez h, to równość $p \approx q$ jest spełniona przez h.

$\boldsymbol{Th}(\mathbf{K}^{\models})$ jest kratą zupełną wszystkich teorii zamkniętych konsekwencji $\mathbf{K}^{\models}$.

Algebry dwuelementowe są głównym pojęciem omawianym w wykładzie. Nacisk jednakże jest położony nie na budowę tych algebr, ale na strukturę kraty $\boldsymbol{Th}(\mathbf{2}^{\models})$ teorii równościowych konsekwencji $\mathbf{2}^{\models}$. Jeżeli $\mathbf{Q} = \boldsymbol{SP}(\mathbf{2})$ jest quasi-rozmaitością generowaną przez $\mathbf{2}$, to konsekwencje $\mathbf{Q}^{\models}$ oraz $\mathbf{2}^{\models}$ pokrywają się.

Wiadomo, że w większości przypadków quasi-rozmaitość $\boldsymbol{SP}(\mathbf{2})$ pokrywa się z rozmaitością $\boldsymbol{SP}(\mathbf{2}) = \boldsymbol{HSP}(\mathbf{2})$. Są jednak wyjątki. Np. quasi-rozmaitość $\boldsymbol{SP}(\mathbf{2})$ generowana przez algebrę $\mathbf{2}$ stanowiącą tabelkę dla negacji $\neg$ nie jest rozmaitością. Quasi-identyczność $(\forall xy)(x \approx \neg x \to x \approx y)$ jest prawdziwa w $\boldsymbol{SP}(\mathbf{2})$, ale nie zachodzi w klasie $\boldsymbol{HSP}(\mathbf{2})$.

Jeżeli $X \subseteq Eq(\tau)$, to $Var(X)$ jest zbiorem zmiennych indywiduowych występujących w równościach z X.

Niech X i Y będą zbiorami równości. X i Y są rozdzielone (*separated*), gdy $Var(X) \cap Var(Y) = \emptyset$.

Twierdzenie. *Niech* $\mathbf{2}$ *będzie algebrą dwuelementową. Niech* $\boldsymbol{X}$ *będzie dowolną niepustą rodziną wzajemnie rozdzielonych skończonych zbiorów równości o sygnaturze algebry* $\mathbf{2}$. *Rodzina teorii zamkniętych* $\{\mathbf{2}^{\models} : X \in \boldsymbol{X}\}$ *generuje dystrybutywną zamkniętą podkratę* $\boldsymbol{B}$ *kraty algebraicznej* $\boldsymbol{Th}(\mathbf{2}^{\models})$.

Ponadto, jeżeli rodzina $\boldsymbol{X}$ *jest nieskończona, to element zerowy kraty* $\boldsymbol{B}$ *jest równy* $\mathbf{2}^{\models}(\emptyset)$.

[1] J. Berman, *A proof of Lyndon's Finite Basis Theorem*, Discrete Mathematics **29** (1980), 229–233.

[2] J. Czelakowski, *The Equationally Defined Commutator. A Study in Equational Logic and Algebra*, Birkhäuser 2015, x + 292 pp.

[3] J. Czelakowski, *The equationally- defined commutator in quasivarieties generated by two-element algebras*, in: J. Czelakowski (ed.) "Don Pigozzi on Abstract Algebraic Logic, Universal Algebra, and Computer Science", in the series Outstanding Contributions to Logic. Vol. **16**((2018), Springer, 131–165.

[4] J. Kalicki, *A test for the equality of truth-tables*, Journal of Symbolic Logic **17**(1952), No. 3, 161–163.

[5] R. Lyndon, *Identities in two-valued calculi*, Transactions of the American Mathematical Society **71**(1951), 457–465.

[6] E.L. Post, *The two-valued iterative systems of mathematical logic*, Annals of Mathematics Studies **5**(1941), Princeton University Press, Princeton 1941, 122 pp.

[7] W. Rautenberg, 2-*Element matrices*, Studia Logica **40**(1980), No 4, 315–353.

[8] W. Taylor, *Pure compactifications in quasi-primal varieties*, Canadian Journal of Matematics **28**(1976), 50–62.

AUTOMORFIZMY GENERYCZNE UPORZĄDKOWANIA LICZB WYMIERNYCH

Monika Drzewiecka
Politechnika Śląska
monidrz938@student.polsl.pl

Niech $\mathcal{P}$ będzie zbiorem wszystkich częściowych automorfizmów skończonych struktury $(\mathbb{Q}, <)$. Gdy $p_1, p_2 \in \mathcal{P}$, przez $p_1 \subseteq p_2$ oznaczamy, że p_2 jest rozszerzeniem p_1. Niech $\mathcal{P}' \subseteq \mathcal{P}$ będzie rodziną niezmienniczą względem automorfizmów struktury $(\mathbb{Q}, <)$. Mówimy, że $\mathcal{P}'$ ma własność

- HP, jeśli dla dowolnych $p_1 \in \mathcal{P}$ i $p_2 \in \mathcal{P}'$ warunek $p_1 \subseteq p_2$ implikuje $p_1 \in \mathcal{P}'$;
- JEP, jesli dla dowolnych $p_1, p_2 \in \mathcal{P}'$ istnieje $p_3 \in \mathcal{P}'$ taki, że $p_1 \subseteq p_3$ i pewien automorfizm α struktury $(\mathbb{Q}, <)$ przesuwa p_2 w $\alpha(p_2) \subseteq p_3$;
- WAP, jeśli dowolny $p \in \mathcal{P}'$ ma rozszerzenie $p_1 \supseteq p$ należące do $\mathcal{P}'$ takie, że dla dowolnych $p_2 \supseteq p_1$, $p_3 \supseteq p_1$ z rodziny $\mathcal{P}'$ istnieje $p_4 \in \mathcal{P}'$ taki, że $p_2 \subseteq p_4$ i pewien automorfizm α struktury $(\mathbb{Q}, <)$ zanurza p_3 w p_4 i dla każdego $a \in Dom(p) \cup Im(p)$, $\alpha(a) = a$.

Jeśli $\mathcal{P}'$ ma własności HP, JEP i WAP, to istnieje $\gamma \in \mathsf{Aut}(\mathbb{Q}, <)$, zdefiniowany jako (słaba) granica Fraissé'go rodziny $\mathcal{P}'$. W tym przypadku mówimy, że γ jest **generyczny** w stosunku do $\mathcal{P}'$. Na przykład, automorfizmy generyczne w stosunku do klasy $\mathcal{P}' = \mathcal{P}$ opisane są w [1]. Odwzorowanie $x \to x + 1$ jest automorfizmem generycznym w stosunku do klasy $\mathcal{P}^+$ wszystkich automorfizmów o parzystości dodatniej (zdefiniowanej w [1]).

Główny wynik mojego referatu stwierdza, że przy dość słabych dodatkowych warunkach, w sytuacji, gdy $\gamma \in \mathsf{Aut}(\mathbb{Q}, <)$ jest generyczny w stosunku do pewnej rodziny $\mathcal{P}' \subseteq \mathcal{P}$, rodzina $\mathcal{P}'$ spełnia następujące wzmocnienie własności WAP (nazywane własnością CAP):

- dowolny $p \in \mathcal{P}'$ ma rozszerzenie $p_1 \supseteq p$, należące do $\mathcal{P}'$ takie, że dla dowolnych $p_2 \supseteq p_1$, $p_3 \supseteq p_1$ z rodziny $\mathcal{P}'$ istnieje $p_4 \in \mathcal{P}'$ taki, że $p_2 \subseteq p_4$ i pewien automorfizm α struktury $(\mathbb{Q}, <)$ zanurza p_3 w p_4 i dla każdego $a \in Dom(p_1) \cup Im(p_1)$, $\alpha(a) = a$.

Otwarte pozostaje pytanie: czy istnieje przykład struktury M, będącej granicą Fraissé'go, taką, że pewna podrodzina $\mathcal{P}'$ częściowych automorfizmów skończonych struktury M jest niezmiennicza względem automorfizmów, spełnia własności HP, JEP, WAP i jednocześnie nie posiada własności CAP?

[1] D. Kuske, J. K. Truss, *Generic automorphisms of the universal partial order*, Proc. Amer. Math. Soc. 129 (2000), 1939–1948.

OGRANICZENIA DOLNE STAŁYCH SESHADRIEGO NA POWIERZCHNIACH O PEWNEJ WŁASNOŚCI

Łucja Farnik

Uniwersytet Pedagogiczny im. Komisji Edukacji Narodowej w Krakowie

lucja.farnik@up.krakow.pl

Celem referatu jest zaprezentowanie uzyskanych wspólnie z Thomasem Bauerem (Philipps-Universität Marburg) nowych ograniczeń stałych Seshadriego na pewnych gładkich powierzchniach rzutowych.

Przypomnijmy, że stałą Seshadriego wiązki liniowej nef L na gładkiej rozmaitości rzutowej X w punkcie x nazywamy liczbę rzeczywistą

$$\varepsilon(L,x) = \inf\left\{\frac{LC}{\operatorname{mult}_x C} :\ C \ni x\right\},$$

gdzie infimum jest brane po wszystkich nierozkładalnych krzywych $C \subset X$ przechodzących przez punkt x.

Jednym z ważnych problemów badawczych w tej dziedzinie jest obliczenie dokładnych wartości stałych Seshadriego, a przynajmniej podanie jak najlepszych ograniczeń. Nasze ograniczenia dolne stałych Seshadriego na powierzchniach abelowych i bieliptycznych poprawiają dotychczas znane ograniczenia. Ponadto ograniczenia te dane są przez liczby wymierne – w przeciwieństwie do wcześniejszych ograniczeń będących liczbami rzeczywistymi, a zatem na pewno niewyliczającymi wartości stałych Seshadriego.

[1] Th. Bauer, Ł. Farnik, *Seshadri constants on abelian and bielliptic surfaces – potential values and lower bounds*, arXiv:2008.07594.

SPECJALNE TYPY WYRÓŻNIKÓW

Krystian Gajdzica
Instytut Matematyki UJ
krystian.gajdzica@im.uj.edu.pl

Niech $f(x) = x^n + ax^k + bx^l + c$ będzie wielomianem o współczynnikach rzeczywistych. Problem wyznaczenia efektywnego wzoru (szybko obliczalnego dla dużych wartości $\deg(f)$) na wyróżnik $\Delta(f)$ jest trudnym zadaniem. Wartym podkreślenia jest jednak fakt, że takie formuły istnieją w przypadkach dowolnych trójmianów oraz dwumianów, zatem otrzymanie analogicznego wyniku dla dowolnego czwórmianu byłoby pożądanym uogólnieniem.

W roku 2018 Shuichi Otake i Tony Shaska (w pracy [1]) wyprowadzili za pomocą skomplikowanych operacji macierzowych taki wzór dla $\Delta(x^n + ax^2 + bx + c)$. Podczas referatu zaprezentuję alternatywną metodę uzyskania tego rezultatu, która wykorzystuje wyłącznie elementarne własności rugownika oraz wyróżnika, a także przedstawię oryginalne wyniki w przypadku kilku innych rodzin czwórmianów, w szczególności, rozpatrzę sytuacje, gdy $k \in \{3, n-1\}$ oraz $l = 1$.

Zarówno pierwsze, jak i drugie podejście może stanowić punkt wyjścia do rozwiązania ogólnego problemu wyznaczenia efektywnego wzoru na $\Delta(f)$.

[1] Shuichi Otake, Tony Shaska, *Bezoutians and the discriminant of a certain quadrinomials*, arXiv:1806.09008 [math.NT], 2018.

PROBLEM FOSY GAUSSA I JEGO UOGÓLNIENIA

Filip Gawron
Uniwersytet Jagielloński
filipux1@gmail.com

Klasyczne zadanie w teorii liczb dotyczy pokazania, że odstępy między kolejnymi liczbami pierwszymi są dowolnie duże. Ten problem można przeformułować w następujący sposób: Czy da się dojść od zera do nieskończoności, krocząc po liczbach pierwszych i mając ograniczoną z góry długość kroku? Tak zadane pytanie można w naturalny sposób uogólnić na inne pierścienie. W szczególności dla pierścienia liczb całkowitych Gaussa problem ten nosi nazwę problemu fosy Gaussa. W referacie zaprezentuję dotychczasowe rezultaty dotyczące tego problemu, jak również jego uogólnienia na inne pierścienie kwadratowe.

O GRUPACH (DUALNIE) SURJUNKTYWNYCH, HIPOTEZIE KAPLANSKIEGO ORAZ METRYCZNYCH ULTRAPRODUKTACH GRUP

Jakub Gismatullin

Instytut Matematyczny Uniwersytetu Wrocławskiego, pl. Grunwaldzki 2/4, 50-384 Wrocław & Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk, ul. Śniadeckich 8, 00-656 Warszawa

jakub.gismatullin@uwr.edu.pl

W trakcie referatu przedstawię hipotezę Gottschalka o działaniach grup oraz jej nowe dualne oblicze. Ponadto omówię nowe wyniki uzyskane w tym temacie, związane z hipotezą Kaplanskiego o pierścieniach grupowych ($ab = 1 \Rightarrow ba = 1$, dla elementów a, b pierścienia grupowego). Ponadto przedstawię metryczną wersję hipotezy Kaplanskiego. Referat będzie oparty na wspólnej pracy z Michałem Douchą.

[1] Jakub Gismatullin, Michal Doucha, *On Dual surjunctivity and applications*, arXiv preprint arXiv:2008.10565.

RZECZYWISTE ROZSZERZENIE LIOUVILLE'A DLA CIAŁ RÓŻNICZKOWYCH CZĄSTKOWYCH

Zbigniew Hajto

Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Jagiellońskiego

zbigniew.hajto@uj.edu.pl

Teoria Picarda-Vessiota dla ciał różniczkowych rzeczywistych została rozwinięta znacznie później niż jej klasyczny odpowiednik mający swoje korzenie jeszcze w XIX wieku (por. [1], Introduction). Przyczyny takiej sytuacji były spowodowane znacznie późniejszym powstaniem rzeczywistej geometrii algebraicznej, jak również błędną interpretacją słynnego przykładu Seidenberga (por. [2], Remark 1). W referacie przedstawimy algebraiczną teorię rzeczywistych rozszerzeń Liouville'a, jej związek z teorią "Fewnomials" (por. [3] i [4]) oraz wybrane zastosowania w teorii rzeczywistych systemów dynamicznych uzyskane przy współpracy z Rouzbehem Mohseni.

[1] T. Crespo, Z. Hajto, *Algebraic Groups and Differential Galois Theory*, Graduate Studies in Mathematics, **122**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2011.

[2] T. Crespo, Z. Hajto, M. van der Put, *Real and p-adic Picard-Vessiot fields*, Math. Ann. **365** (2016), 93-103.

[3] O.A. Gel'fond, A.G. Khovanskii, *Real Liouville Functions*, Funct. Annal. Appl. **14** (1980), 122-123.

[4] A.G. Khovanskii, *Fewnomials*, AMS Translations, **88**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991.

RANGI GRUP MORDELLA-WEILA JAKOBIANÓW KRZYWYCH HIPERELIPTYCZNYCH $Y^2 = X^5 + AX$

Tomasz Jędrzejak
Uniwersytet Szczeciński, Instytut Matematyki
tjedrzejak@gmail.com

Niech K będzie ciałem liczbowym (czyli skończonym rozszerzeniem ciała liczb wymiernych) i A – rozmaitością abelową (czyli rzutową rozmaitością algebraiczną, która posiada strukturę grupy algebraicznej). Na mocy twierdzenia Mordella-Weila grupa punktów K-wymiernych A jest skończenie generowana. Innymi słowy,

$$A(K) \simeq T \times \mathbb{Z}^r,$$

gdzie T jest skończoną grupą torsyjną, zaś r jest nieujemną liczbą całkowitą zwaną rangą. Nie jest znany żaden uniwersalny algorytm pozwalający ją obliczyć, ale istnieją metody (np. 2-spadek) pozwalające oszacować rangę w pewnych przypadkach.

W referacie rozważymy rodziny krzywych hipereliptycznych genusu dwa określonych nad $\mathbb{Q}$ i ich rozmaitości Jacobiego (jakobianów):

$$C_a : y^2 = x^5 + ax,$$
$$J_a := Jac(C_a).$$

Bez straty ogólności $a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ i dla każdej liczby pierwszej p mamy $p^8 \nmid a$. Niech r_a oznacza rangę $J_a(\mathbb{Q})$ (J_a jest przykładem rozmaitości abelowej wymiaru dwa). Wskażemy górne ograniczenia na r_a (w szczególności znajdziemy nieskończone podrodziny J_a z rangą 0). Na przykład przy pewnych założeniach o ciele $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{-a})$ mamy $r_a \leq \omega(2a) + 1$ (gdy $a > 0$) oraz $r_a \leq \omega(2a) + 2$ (gdy $a < 0$), gdzie $\omega(2a)$ to liczba różnych dzielników pierwszych $2a$. Ponadto, jeśli $p \equiv 3 (\mathrm{mod}\, 8)$ jest liczbą pierwszą, to $r_p, r_{-p} \leq 1$ i $r_{-2p} \leq 2$, a jeśli dodatkowo $p \equiv 11, 19 (\mathrm{mod}\, 32)$, to $r_p = 0$. W konsekwencji, $C_p(\mathbb{Q}) = \{\infty, (0,0)\}$ dla takich liczb pierwszych. Przedstawimy główne idee dowodów oraz na koniec podamy pewne obliczenia numeryczne dotyczące rangi i sformułujemy kilka hipotez.

[1] T. Jędrzejak, *Ranks in the family of hyperelliptic Jacobians of $y^2 = x^5 + ax$*, J. Number Theory **223** (2021), 35–52.

PIERŚCIENIE BEZ (WARUNKU ISTNIENIA) ELEMENTÓW PRZECIWNYCH

Piotr Jędrzejewicz
Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu
pjedrzej@mat.umk.pl

Półpierścień (ang. semiring) to zbiór z działaniami dodawania i mnożenia spełniający wszystkie warunki definicji pierścienia poza warunkiem istnienia elementów przeciwnych. Bardziej precyzyjnie, zamiast tego jest warunek dotyczący mnożenia przez zero. Podstawowym przykładem półpierścienia jest zbiór liczb naturalnych z zerem: $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Celem referatu jest przedyskutowanie pewnych własności półpierścienia szeregów nad $\mathbb{N}_0$ motywowanych pracami Schanuela [2] i Proppa [1].

[1] J. Propp, *Euler measure as generalized cardinality*, arXiv: math.CO/0203289.

[2] S. Schanuel, *Negative sets have Euler characteristic and dimension*, w: *Category Theory. Proceedings of the International Conference held in Como, Italy, July 22-28, 1990*, Lecture Notes in Mathematics, **1488**, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1991, str. 379–385.

O CHARAKTERYZACJI CIAŁ, KTÓRE SĄ SUMAMI DWÓCH PODCIAŁ WŁAŚCIWYCH

Marek Kępczyk
Politechnika Białostocka
m.kepczyk@pb.edu.pl

Powiemy, że ciało F można przedstawić w postaci sumy dwóch podciał właściwych, gdy

$$F = F_1 + F_2, \tag{1}$$

gdzie F_1, F_2 są podciałami właściwymi F oraz $F_1 + F_2$ oznacza zbiór wszystkich takich sum $f_1 + f_2$, że $f_1 \in F_1, f_2 \in F_2$. Przedstawimy odpowiedzi na pytania postawione w pracy [1], dotyczące rozkładalności typu 1 na sumy podciał właściwych.

Badania zostały zrealizowane w ramach pracy WZ/WI-IIT/1/2020 (Politechnika Białostocka) i sfinansowane ze środków na naukę MNiSW.

[1] M. Kępczyk and R. Mazurek, On the representation of fields as finite sums of proper subfields *Results Math.* **75(2)** (2020) Article 65.

CZĘŚĆ ANIZOTROPOWA FORMY KWADRATOWEJ NAD CIAŁEM GLOBALNYM

Przemysław Koprowski
Uniwersytet Śląski
przemyslaw.koprowski@us.edu.pl

Obliczeniowa teoria form kwadratowych nad ciałami globalnymi (zarówno liczbowymi, jak też funkcyjnymi) niesie ze sobą wiele wyzwań. Jednym z nich jest problem izotropowości formy kwadratowej. Niech K będzie ciałem globalnym, o charakterystyce $\neq 2$ oraz niech q będzie formą kwadratową nad ciałem K. Możemy się zastanawiać, czy q jest izotropowa. Jeśli tak jest w istocie, możemy dalej pytać o jej indeks Witta, część anizotropową, a w końcu o wektor izotropowy. To czy istnieje algorytm odpowiadający na ostatnie pytanie, stanowi wciąż problem otwarty. Algorytmy rozwiązujące dwa pierwsze zagadnienia zostały przedstawione w pracy [1], wspólnej z Alfredem Czogałą. W swoim referacie przedstawię odpowiedź na trzecie z powyższych pytań — algorytm konstruujący efektywnie część anizotropową podanej formy kwadratowej.

Przedstawione w trakcie referatu wyniki zostały uzyskane wspólnie z Beatą Rothkegel oraz Mawunyo Kofi Darkey-Mensah.

[1] P. Koprowski, A. Czogała *Computing with quadratic forms over number fields*, J. Symb. Comput. **89** (2018), 129–145.

SILNY PORZĄDEK W ROZMAITOŚCIACH FREGOWSKICH I JEGO ZWIĄZEK Z KOMUTATOREM

Katarzyna Korwin-Słomczyńska
Uniwersytet Pedagogiczny w Krakowie
kslomcz@up.krakow.pl

Klasę $\mathcal{K}$ algebr tego samego typu z wyróżnioną stałą 1 nazywamy *fregowską*, jeżeli kongruencje algebr z $\mathcal{K}$ są jednoznacznie wyznaczone przez klasę abstrakcji 1 oraz w każdej algebrze $\mathbf{A} \in \mathcal{K}$ relacja $\leq$ określona przez $a \leq b \Leftrightarrow \theta_A(1,b) \subset \theta_A(1,a)$ dla $a, b \in A$, jest częściowym porządkiem, gdzie $\theta_A(c,d)$ oznacza najmniejszą kongruencję algebry $\mathbf{A}$ zawierającą parę (c,d). W algebrach fregowskich będziemy rozważać jeszcze jeden (mocny) porządek dany przez $a \ll b \Leftrightarrow \theta_A(b,a) = \theta_A(1,a)$ dla $a, b \in A$.

Można pokazać, że jeżeli $\mathcal{K}$ jest rozmaitością, to dla algebry z $\mathcal{K}$ długość maksymalnego $\ll$-łańcucha jest mniejsza niż n wtw, gdy długość maksymalnego łańcucha $\wedge$-nierozkładalnych kongruencji jest też mniejsza niż n. Co więcej, klasa algebr o tej własności tworzy podrozmaitość $\mathcal{K}$. Ponadto dla dowolnego $a \in A$, $\mathbf{A} \in \mathcal{K}$, istnieje kongruencja γ_a w $\mathbf{A}$ taka, że $1/\gamma_a = \{b \in A : a \ll b\}$ oraz $\gamma_a \subset [\theta_A(1,a), \theta_A(1,a)]$, gdzie $[\cdot,\cdot]$ oznacza operację komutatora. Jeżeli algebra $\mathbf{A}$ ma term Malcewa, to γ_a można wtedy opisać prostym wzorem.

O WYŻSZYCH LICZBACH PITAGOREJSKICH

Tomasz Kowalczyk
Uniwersytet Jagielloński
tomek.kowalczyk@uj.edu.pl

Dla pierścienia A definiujemy n-tą liczbę pitagorejską $p_n(A)$ jako najmniejszą taką liczbę naturalną g, że dowolna suma n-tych potęg da się zapisać jako suma co najwyżej g n-tych potęg. Jeśli taka liczba nie istnieje kładziemy $p_n(A) = \infty$. W referacie pragnę omówić wyniki dotyczące zależności wyższych liczb pitagorejskich $p_n(K[[x]])$ oraz $p_n(K((x)))$ z $p_n(K)$ i n-tym poziomem A. Przedstawię również oszacowania dla n-tej liczby pitagorejskiej innej rodziny pierścieni, które wynikają ze znajomości tych liczb dla szeregów formalnych i szeregów Laurenta. Wyniki pochodzą ze wspólnej pracy z Piotrem Miską.

[1] Kowalczyk T., Miska P., *On higher Pythagoras numbers*, in preparation.

TEORIA MODELI DZIAŁAŃ GRUP NA CIAŁACH

Piotr Kowalski
Uniwersytet Wrocławski
Piotr.Kowalski@math.uni.wroc.pl

Omówię teorię modeli działań skończonych grup na ciałach (wspólna praca z Danielem Hoffmannem) i teorię modeli działań przemiennych torsyjnych grup na ciałach (wspólna praca z Özlem Beyarslan). Będę się koncentrował na tych własnościach wspomnianych powyżej działań, które są związane z teorią Galois. Omówię aksjomatyzację „algebraicznie domkniętych" (formalnie: „egzystencjalnie domkniętych") działań tego typu oraz podam pewną algebraiczną własność przemiennych grup torsyjnych, która jest równoważna istnieniu takiej aksjomatyzacji.

WYKŁADNIK ŁOJASIEWICZA W NIEZDEGENEROWANYCH DEFORMACJACH OSOBLIWOŚCI POWIERZCHNI

Tadeusz Krasinski
Uniwersytet Łódzki
tadeusz.krasinski@wmii.uni.lodz.pl

Głównym rezultatem jest stałość wykładnika Łojasiewicza w niezdegenerowanych μ-stałych deformacjach osobliwości powierzchni. Jest to potwierdzenie hipotezy Teisssiera w tym szczególnym przypadku. Wynik wspólny z Szymonem Brzostowskim i Grzegorzem Oleksikiem.

ROZSZERZENIA CIAŁ A KOMPOZYTY WIELOMIANOWE

Łukasz Matysiak
Uniwersytet Kazimierza Wielkiego, Bydgoszcz
lukmat@ukw.edu.pl

W 1991 roku D.D. Anderson, D.F. Anderson i M. Zafrullah w [1] zadali następujące pytanie: Jakie są pierścienie pomiędzy $D[X]$ i $K[X]$, gdy D jest dziedziną, K jest ciałem oraz $D \subset K$. Jedną z dwóch odpowiedzi są kompozyty, które definiują jako $D + XK[X]$. Do dzisiaj takie kompozyty pojawiają się w przeróżnych pracach jako przykłady na zachodzenie lub nie pewnych własności. Od 2019 roku zacząłem je badać pod kątem wielu różnych podstawowych i znanych własności algebraicznych ([2], [3]), a także uogólniłem odpowiedź Andersonów i Zafrullaha twierdząc, że może być nieskończenie wiele pierścieni pomiędzy $D[X]$ i $K[X]$ nazywając je kompozytami wielomianowymi ([2]). W referacie skupimy się na kompozytach wielomianowych postaci $K + XL[X]$, gdzie $K \subset L$ są ciałami. Takie kompozyty są najbardziej szczególne pod kątem wielu wyników. Celem referatu jest odpowiedzenie sobie na pytanie, czy istnieje związek pomiędzy kompozytem $K + XL[X]$ a rozszerzeniem ciał $K \subset L$. Odpowiedź jest pozytywna i przyczyniła się do wielu wyników i zależności pomiędzy kompozytami, teorią Galois oraz elementami nilpotentnymi ([4]).

[1] D.D. Anderson, D.F. Anderson, M. Zafrullah, Rings between D[X] and K[X], *Houston J. of Mathematics*, v.17, (1991) 109–129.

[2] Ł. Matysiak, *On properties of composites and monoid domains*, Zaakceptowana w Italian Journal of Pure and Applied Mathematics (2020).

[3] Ł. Matysiak, *ACCP and atomic properties of composites and monoid domains*, Zaakceptowana w Indian Journal of Mathematics (2020).

[4] Ł. Matysiak, *Relationships between polynomial composites and certain types of fields extensions*, ArXiv: 2011.09904, (2021).

O PIERŚCIENIACH ARCHIMEDESOWYCH

Ryszard Mazurek
Politechnika Białostocka, Wydział Informatyki
r.mazurek@pb.edu.pl

Pierścień R z jedynką nazywamy *prawostronnie* (*lewostronnie*) *archimedesowym*, jeżeli $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} Ra^n = 0$ (odpowiednio, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} a^nR = 0$) dla każdego nieodwracalnego elementu $a \in R$. Pierścienie takie są naturalnym uogólnieniem przemiennych dziedzin archimedesowych, wprowadzonych przez P. B. Sheldona w artykule [6], w którym badany był problem, dla jakich przemiennych dziedzin R i multiplikatywnych podzbiorów $S \subseteq R$, ciała ułamków pierścieni szeregów potęgowych $R[[x]]$ i $R_S[[x]]$ są równe. Przykładami pierścieni archimedesowych są przemienne dziedziny, w których każdy wstępujący ciąg ideałów głównych stabilizuje się.

W czasie referatu przedstawione będą charakteryzacje dziedzin i zredukowanych pierścieni prawostronnie (lewostronnie) archimedesowych w klasach pierścieni skośnych wielomianów $R[x;\sigma]$, skośnych szeregów potęgowych $R[[x;\sigma]]$ i skośnych uogólnionych szeregów potęgowych $R[[S,\omega]]$ ([1-5]).

Badania zostały zrealizowane w ramach pracy badawczej nr WZ/WI-IIT/1/2019 w Politechnice Białostockiej i sfinansowane z subwencji przekazanej pezez Ministra Nauki i Szkolnictwa Wyższego.

[1] R. Mazurek, *Archimedean domains of skew generalized power series*, Forum Math. **32** (2020), no. 4, 1075–1093.

[2] R. Mazurek, *Reduced Archimedean skew polynomial rings and skew power series rings*, J. Pure Appl. Algebra **225** (2021), no. 10, 106706, 8 pp.

[3] A. Moussavi, F. Padashnik, K. Paykan, *Archimedean skew generalized power series rings*, Commun. Korean Math. Soc. **34** (2019), no. 2, 361–374.

[4] H. Mousavi, F. Padashnik, A. A. Qureshi, *On reduced archimedean skew power series rings*, J. Algebra Appl., to appear.

[5] A. R. Nasr-Isfahani, *The ascending chain condition for principal left ideals of skew polynomial rings*, Taiwanese J. Math. **18** (2014), no. 3, 931–941.

[6] P. B. Sheldon, *How changing $D[[x]]$ changes its quotient field*, Trans. Amer. Math. Soc. **159** (1971), 223–244.

O GĘSTOŚCI ILORAZÓW WARTOŚCI FORM KWADRATOWYCH W CIAŁACH LICZB P-ADYCZNYCH

Piotr Miska
Uniwersytet Jagielloński w Krakowie
piotr.miska@uj.edu.pl

Donnay, Garcia and Rouse in [1], motywowani pytaniem w [2, Problem 4.4] sklasyfikowali te nieosobliwe formy kwadratowe Q o współczynnikach całkowitych i te liczby pierwsze p, dla których zbiór ilorazów wartości formy Q dla argumentów całkowitych jest gęsty w ciele liczb p-adycznych $\mathbb{Q}_p$. Celem mojego referatu jest przedstawienie innego, krótszego dowodu opartego na liczbie klas kwadratowych w $\mathbb{Q}_p^*$ reprezentowanych przez daną formę kwadratową.

Referat na podstawie pracy [3].

[1] Ch. Donnay, S. R. Garcia, J. Rouse, *p-adic quotient sets II: Quadratic forms*, J. Number Theory **201** (2019) 23–39.

[2] S. R. Garcia, Y. X. Hong, F. Luca, E. Pinsker, C. Sanna, E. Schechter, A. Starr, *p-adic quotient sets*, Acta Arith. **179** (2) (2017) 163–184.

[3] P. Miska, *A note on p-adic denseness of quotients of values of quadratic forms*, Indag. Math. 7 pp., available online 18.01.2021, DOI: 10.1016/j.indag.2021.01.003.

JEDNOŚĆ MATEMATYKI: ROZMAITOŚCI ALGEBRAICZNE Z PUNKTU WIDZENIA ANALIZY, TOPOLOGII I TEORII LICZB

Bartosz Naskręcki
Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu
nasqret@gmail.com

Jednym z fascynujących od lat tematów jest zdumiewająca spójność opisu rozmaitości algebraicznych jako obiektów istniejących nad ciałami skończonymi, ciałem liczb zespolonych oraz ich związek z tzw. całkami okresowymi (period integrals). W czasie wykładu przedstawię kilka wyników dotyczących opisu parametryzowanych rodzin rozmaitości algebraicznych, związanych z nimi równań różniczkowych typu Picarda-Fuchsa oraz ich związek z liczeniem punktów na tych rozmaitościach nad ciałem skończonym. W tle będziemy obserwować pojawiający się hipotetyczny opis rozmaitości jako motywu algebraicznego. W ujęciu holistycznym Juri Manin nazwał ten fenomen zdumiewającą „jednością matematyki". Na koniec wspomnę o kilku swoich wynikach związanych z wykorzystaniem teorii Hodge'a na rozmaitościach K3 i pewnym ich związkiem z równaniami różniczkowymi typu hipergeometrycznego.

PRZEDŁUŻANIE WYPUKŁOŚCI FUNKCJI G-NIEZMIENNICZYCH Z PODPRZESTRZENI NA PRZESTRZEŃ EATONOWSKĄ

Marek Niezgoda
Instytut Matematyki, Uniwersytet Pedagogiczny w Krakowie
marek.niezgoda@up.krakow.pl

Trójka Eatona (w skrócie E-system) jest systemem algebraicznym związanym z pewnym twierdzeniem dekompozycyjnym dla wektorów przestrzeni liniowej V wyposażonej w iloczyn skalarny, dla którego dodatkowo zachodzi pewna specjalna nierówność związana z tą dekompozycją. Typowym przykładem takiej sytuacji jest Twierdzenie Spektralne dla macierzy hermitowskich powiązane z nierównością Fana-Theobalda. Innym przykładem jest przestrzeń macierzy zespolonych ustalonego rozmiaru wyposażona w Twierdzenie Dekompozycyjne o wartościach singularnych macierzy wraz z nierównością von Neumanna.

W niniejszym referacie, dla danej trójki Eatona (V, G, D) oraz dla funkcji rzeczywistej $F : V \to R$, niezmienniczej względem grupy G działającej na V, przedstawimy problem rozszerzania wypukłości funkcji F ze stożka eatonowskiego D na całą przestrzeń V. W naszej metodzie redukujemy ten problem z E-systemu (V, G, D) do jego dowolnego podsystemu (W, H, D). W ten sposób otrzymujemy rezultaty nawiązujące do klasycznych twierdzeń J. von Neumanna, C. Davisa, A. S. Lewisa oraz T.-Y. Tama et al.

[1] C. Davis, *All convex invariant functions of hermitian matrices*, Arch. Math. **8** (1957), 276–278.

[2] M. L. Eaton, *On group induced orderings, monotone functions, and convolution theorems*, in: Inequalities in Statistics and Probability, Y. L. Tong (ed.), IMS Lectures Notes – Monograph Series **5**, IMS, Hayward (1984), 13–25.

[3] M. L. Eaton, *Group induced orderings with some applications in statistics*, CWI Newsletter **16** (1987), 3–31.

[4] M. L. Eaton, M. D. Perlman, *Reflection groups, generalized Schur functions, and the geometry of majorization*, Ann. Probab. **5** (1977), 829–860.

[5] K. Fan, *On a theorem of Weyl concerning eigenvalues of linear transformations*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA **35** (1949), 652–655.

[6] A. S. Lewis, *Group invariance and convex matrix analysis*, SIAM J. Matrix Anal. Appl. **17** (1996), 927–949.

[7] A. S. Lewis, *Convex analysis on Cartan subspaces*, Nonlinear Anal. **42** (2000), 813–820.

[8] M. Niezgoda, *G-majorization inequalities and canonical forms of matrices*, J. Convex Anal. **14** (2007), 35–48.

[9] M. Niezgoda, *On convexity and ψ-uniform convexity of G-invariant functions on an Eaton triple*, J. Convex Anal. **26** (2019), 1001–1019.

[10] M. Niezgoda, *Von Neumann-Davis type theorems for HLPK and Sherman functionals on Eaton triples*, Period. Math. Hung. **81** (2020), 46–64.

[11] T.-Y. Tam, W. C. Hill, *On G-invariant norms*, Linear Algebra Appl. **331** (2001), 101–112.

[12] T.-Y. Tam, W. C. Hill, *Derivatives of orbital function and an extension of Berezin-Gel'fand's theorem*, Spec. Matrices **4** (2016), 333–349.

[13] C.M. Theobald, *An inequality for the trace of the product of two symmetric matrices*, Math. Proc. Camb. Philos. Soc. **77** (1975), 265–267.

[14] J. von Neumann, *Some matrix inequalities and matrization of matric space*, Tomsk. Univ.Rev. **1** (1937), 286–300.

GEOMETRIA W STRUKTURACH HENSELOWO MINIMALNYCH

Krzysztof Jan Nowak
Instytut Matematyki Uniwersytetu Jagiellońskiego
nowak@im.uj.edu.pl

W referacie przedstawię mój nowy preprint [9] dotyczący geometrii w strukturach Henselowo minimalnych. Aksjomatyczne pojęcie Henselowej minimalności (w skrócie, h-minimalności) jest analogiem o-minimalności dla ciał z waluacją, wprowadzonym niedawno przez Cluckersa–Halupczoka–Rideau [1]. W swojej pracy zakładam dodatkowo, że w sorcie pomocniczym RV (łączącym ciało rezydualne i grupę waluacji) indukowany jest standardowy język algebraiczny. Warunek ten jest spełniony przez większość klasycznych struktur na ciałach Henselowskich, w tym na ciałach Henselowskich ze strukturą analityczną. W tym ogólnym, aksjomatycznym kontekście przedstawię wiele wyników z moich poprzednich prac [2, 3, 4, 5] takich, jak twierdzenie o istnieniu granicy, wybór łuku, twierdzenie o domkniętości i kilka nie-archimedesowych wersji nierówności Łojasiewicza. Rezultatem kluczowym dla licznych zastosowań jest twierdzenie o domkniętości; zobacz też [6, 7, 8]. Umożliwia ono, w szczególności, zastosowanie desingularyzacji w sposób podobny jak nad ciałami lokalnie zwartymi.

[1] R. Cluckers, E. Halupczok, S. Rideau, *Hensel minimality*, arXiv:1909.13792 [math.LO] (2019).

[2] K.J. Nowak, *Some results of algebraic geometry over Henselian rank one valued fields*, Sel. Math. New Ser. **23** (2017), 455–495.

[3] K.J. Nowak, *A closedness theorem and applications in geometry of rational points over Henselian valued fields*, J. Singul. **21** (2020), 212–233.

[4] K.J. Nowak, *A closedness theorem over Henselian fields with analytic structure and its applications*. In: Algebra, Logic and Number Theory, Banach Center Publ. **121** (2020), 141–149.

[5] K.J. Nowak, *Some results of geometry over Henselian fields with analytic structure*, arXiv:1808.02481 [math.AG] (2018).

[6] K.J. Nowak, *Definable retractions and a non-Archimedean Tietze–Urysohn theorem over Henselian valued fields*, arXiv:1808.09782 [math.AG] (2018).

[7] K.J. Nowak, *Definable retractions over complete fields with separated power series*, arXiv:1901.00162 [math.AG] (2019).

[8] K.J. Nowak, *Definable transformation to normal crossings over Henselian fields with separated analytic structure*, Symmetry **11** (7) (2019), 934.

[9] K.J. Nowak, *Some results of geometry in Hensel minimal structures*, arXiv:2103.01836 [math.AG] (2021).

ROZSZERZENIA SŁÓW BEZKWADRATOWYCH

Bartłomiej Pawlik
Instytut Matematyki, Politechnika Śląska
bpawlik@polsl.pl

Słowo U zawiera kwadrat, jeżeli $U = AXXB$ dla pewnych słów A, B i pewnego niepustego słowa X. Słowo, które nie zawiera kwadratu nazywamy słowem bezkwadratowym. Rozszerzeniem słowa $S = N'N''$ nazywamy słowo $R = N'\mathtt{x}N''$, gdzie $\mathtt{x}$ jest literą. Przykładowo, słowo `filologia` zawiera kwadrat `lolo`, natomiast słowo `matematyka` jest bezkwadratowe. Słowo `wariant` jest rozszerzeniem słowa `wariat` poprzez wstawienie litery `n` pomiędzy litery `a` oraz `t`.

Nietrudno zauważyć, że nad alfabetem $\{\mathtt{1}, \mathtt{2}\}$ nie ma słów bezkwadratowych długości większej niż 3. Klasyczny wynik Thue'go [1, 4] stanowi, że

nad alfabetem $\{\mathtt{1}, \mathtt{2}, \mathtt{3}\}$ *istnieją dowolnie długie słowa bezkwadratowe.*

Powyższe twierdzenie zapoczątkowało tzw. kombinatorykę na słowach. Jednym z najnowszych wyników w tej dziedzinie jest twierdzenie [2] orzekające, że

nad alfabetem $\{\mathtt{1}, \mathtt{2}, \mathtt{3}\}$ *istnieją dowolnie długie słowa bezkwadratowe, których każde rozszerzenie jest kwadratem.*

W niniejszym referacie przedstawię kilka wyników i hipotez związanych z dalszymi badaniami rozszerzeń słów bezkwadratowych.

W oparciu o pracę wspólną z Jarosławem Grytczukiem i Hubertem Kordulewskim [3].

[1] J. Berstel, *Axel Thue's papers on repetitions in words: a translation*, Publications du LaCIM, vol. 20, Université du Québec a Montréal (1995).

[2] J. Grytczuk, H. Kordulewski, A. Niewiadomski, *Extremal square-free words*, The Electron. J. Combin. **27** (2020) P1.48.

[3] J. Grytczuk, H. Kordulewski, B. Pawlik, *Square-free extensions of words*, w przygotowaniu.

[4] A. Thue, *Über unendliche Zeichenreichen*, Norske Vid. Selsk. Skr., I Mat. Nat. Kl., Christiania **7** (1906) 1–22.

SPEKTRUM RZECZYWISTE, TOPOLOGIA GROTHENDIECKA I DUALNOŚĆ STONE'A

Artur Piękosz
Politechnika Krakowska
artur.piekosz@pk.edu.pl

W geometrii semialgebraicznej często bierze się spektrum rzeczywiste jakiegoś pierścienia lub operację tylda dla zbiorów semialgebraicznych. Pojawiające się przestrzenie topologiczne są spektralne i każda z nich zależy tylko od pewnej kraty (inaczej: pierścienia) podzbiorów odpowiedniego zbioru.

Pojęcie smopologii pozwala na skonstruowanie analogicznego spektrum nawet w przypadku nieskończonej sklejki zbiorów semialgebraicznych, czyli przestrzeni lokalnie semialgebraicznej nad ciałem rzeczywiście domkniętym oraz w dużo bardziej ogólnych sytuacjach (np. przestrzeni lokalnie definiowalnej nad o-minimalnym wzbogaceniem ciała). *Smopologia* na zbiorze X to rodzina $\mathcal{L}_X$ podzbiorów zbioru X, która spełnia trzy proste warunki: (S1) zawiera zbiór pusty, (S2) jest zamknięta na niepuste skończone sumy i przecięcia, (S3) pokrywa zbiór X. Elementy $\mathcal{L}_X$ są nazywane (patrz np. [1]) zbiorami małymi otwartymi (*smopami*). Jeżeli $X \in \mathcal{L}_X$, to smopologię nazywamy *małą*. Morfizmami zbiorów ze smopologiami, czyli *przestrzeni lokalnie małych*, są odwzorowania ograniczone (obraz smopa jest zawarty w smopie w przeciwdziedzinie) i ciągłe (przeciwobraz smopa jest zgodny ze smopami w dziedzinie). Każda smopologia jest uproszczeniem pewnej topologii uogólnionej w sensie Delfsa i Knebuscha, która jest szczególnym przypadkiem konkretnej topologii Grothendiecka (G-topologii).

Dualność Stone'a wyjaśnia, jak konstruuje się takie uogólnienia spektrum rzeczywistego. Rozważamy ([2]) warianty dla przestrzeni małych lub lokalnie małych. Główna wersja naszej dualności Stone'a orzeka, że kategoria przestrzeni lokalnie małych Kołmogorowa oraz odwzorowań ciągłych ograniczonych jest równoważna kategorii przestrzeni spektralnych z bornologiami w kratach podzbiorów otwartych (quasi)zwartych i grudami oraz odwzorowaniami spektralnymi respektującymi grudy i spełniającymi pewien warunek ograniczoności. Obie są dualnie równoważne kategorii krat rozdzielnych ograniczonych z bornologiami i grudami filtrów pierwszych oraz homomorfizmów krat ograniczonych respektujących grudy i spełniających pewien warunek dominacji.

[1] A. Piękosz, *Locally small spaces with an application*, Acta Math. Hungar. **160**(1) (2020), 197–216.

[2] A. Piękosz, *Stone duality for Kolmogorov locally small spaces*, preprint, arXiv: 1912.12490.

WIĄZARY I ICH ZWIĄZKI Z PIERŚCIENIAMI

Karol Pryszczepko
Wydział Matematyki, Uniwersytet w Białymstoku,
Ciołkowskiego 1M, 15-245 Białystok
karolp@math.uwb.edu.pl

Sterta abelowa jest to zbiór H z tetralną operacją $[-,-,-]$ taką, że dla dowolnych $h_1, h_2, h_3, h_4, h_5 \in H$:

$$[h_1, h_2, [h_3, h_4, h_5]] = [[h_1, h_2, h_3], h_4, h_5], \tag{1}$$

$$[h_1, h_1, h_2] = h_2 \quad \& \quad [h_1, h_2, h_2] = h_1, \tag{2}$$

$$[h_1, h_2, h_3] = [h_3, h_2, h_1]. \tag{3}$$

Dla dowolnego ustalonego elementu $e \in H$ określamy działanie dwuargumentowe $+_e$ w zbiorze H, przyjmując, że

$$a +_e b = [a, e, b].$$

Wówczas $(H, +_e, e)$ jest grupą abelową zwaną **retraktem** stery H i $-_e h == [e, h, e]$ dla $h \in H$. Ponadto dla dowolnych $e, f \in H$ grupy $(H, +_e, e)$ i $(H, +_f, f)$ są izomorficzne. Na odwrót, jeżeli $(A, +)$ jest grupą abelową i $[a, b, c] = a - b + c$ dla dowolnych $a, b, c \in A$, to $(A, [-,-,-])$ jest stertą abelową.

Wiązarem nazywamy zbiór T z tetralną operacją $[-,-,-]$ i z dwuargumentowym łącznym działaniem $\cdot$ zwanym mnożeniem, przy czym $(T, [-,-,-])$ jest stertą abelową oraz dla dowolnych $a, b, c, d \in T$:

$$a \cdot [b, c, d] = [a \cdot b, a \cdot c, a \cdot d] \quad \& \quad [a, b, c] \cdot d = [a \cdot d, b \cdot d, c \cdot d]. \tag{4}$$

Celem wystąpienia jest przedstawienie podstawowych własności wiązarów i omówienie związku wiązarów z pierścieniami.

[1] R. R. Andruszkiewicz, T. Brzeziński, B. Rybołowicz, *Ideal Ring Extensions and Trusses*, *Preprint* arXiv: 2101.09484 (2021).

[2] R. Baer, Zur Einführung des Scharbegriffs, *J. Reine Angew. Math.* **160** (1929), 199–207.

[3] T. Brzeziński, Trusses: Between braces and rings, *Trans. Amer. Math. Soc.* **372** (2019), 4149–4176.

O TRÓJKĄTNYCH INWOLUCJACH

Roksana Słowik
Politechnika Śląska
roksana.slowik@polsl.pl

Niech G będzie grupą. Element $g \in G$ nazywamy inwolucją, gdy jego rząd jest równy 2. Tematem przedstawionego referatu będą inwolucje w grupach macierzowych, przede wszystkim macierzy trójkątnych. Przedstawimy krótki przegląd klasycznych wyników dotyczących inwolucji i ich własności w pełnej grupie liniowej macierzy, a także w grupie macierzy trójkątnych. Następnie wskażemy analogiczne własności dla macierzy trójkątnych nieskończonych. Wśród nich wyróżnimy inwolucje pochodzące z pewnej szczególnej grupy takich macierzy, tj. grupy Riordana.

O PEWNYCH ZASTOSOWANIACH KLAMEREK I ICH ZWIĄZKACH Z INNYMI DZIEDZINAMI ALGEBRY

Agata Smoktunowicz
Uniwersytet Edynburski
A.Smoktunowicz@ed.ac.uk

Około 2005 roku Wolfgang Rump wprowadził pojęcie klamerki ('brace'), aby scharakteryzować inwolucyjne, niezdegenerowane rozwiązania równania Yanga-Baxtera. Klamerki szybko znalazły zastosowanie w innych dziedzinach algebry. W tym wykładzie omówię niektóre z tych zastosowań. Przypomnijmy, że klamerką nazywamy zbiór A z operacjami mnożenia $\circ$ oraz dodawania $+$ takimi, że $(A, +)$ jest grupą abelową, $(A, \circ)$ jest grupą oraz zachodzi $a \circ (b + c) + a = a \circ b + a \circ c$ dla dowolnych $a, b, c \in A$.

Klamerki są równoważne paru strukturom z teorii grup, takim jak regularne podgrupy holomorfu grup abelowych, grupy z dwukierunkowym kocyklem. W algebraicznej teorii liczb klamerki są wykorzystywane do opisu rozszerzeń Hopf-Galois. Aby scharakteryzować te rozszerzenia, wystarczy scharakteryzować klamerki z daną grupą addytywną oraz grupą multiplikatywną wraz z automorfizmami tych klamerek.

W 2014 roku Rump zauważył równoważność klamerek i algebr pre-Liego przy użyciu pewnej formuły. Istnieje też związek klamerek z grupoidami oraz z grupami Garside.

Z drugiej strony, Anastasia Doikou oraz Robert Weston i Aryan Ghobadi zauważyli fascynujące związki pomiędzy klamerkami i kwantowymi układami całkowymi. W wykładzie wspomnę też o pewnych otwartych pytaniach dotyczących klamerek i pierścieni nilpotentnych.

OSTATNIE NIEZEROWE CYFRY WARTOŚCI WIELOMIANÓW I P-ADYCZNYCH FUNKCJI ANALITYCZNYCH

Bartosz Sobolewski
Instytut Matematyki, Uniwersytet Jagielloński
bartosz.sobolewski@uj.edu.pl

Niech $\ell_{b,d}\colon \mathbb{N}_+ \to \{1, \ldots, b^d - 1\}$ będzie funkcją, której wartość $\ell_{b,d}(n)$ charakteryzuje ostatni niezakończony zerem blok d cyfr w rozwinięciu liczby $n \in \mathbb{N}_+$ w bazie $b \geq 2$. W szczególności, $\ell_{b,1}(n)$ to ostatnia niezerowa cyfra n. Dotychczas badane były między innymi ciągi $(\ell_{b,d}(n!))_{n\in\mathbb{N}}$ pod kątem własności takich jak k-automatyczność oraz częstotliwość występowania poszczególnych wartości [1, 2, 3].

Celem tego referatu będzie przedstawienie wyników analogicznego typu dla ciągów postaci $(\ell_{b,d}(f(n)))_{n\in\mathbb{N}}$, gdzie f jest wielomianem lub p-adyczną funkcją analityczną. W szczególności, podam pełną klasyfikację f pod względem k-automatyczności rozważanego ciągu. Zaprezentuję zastosowanie otrzymanych wyników na przykładzie ciągów Lucasa pierwszego rodzaju.

[1] J-M. Deshouillers, I. Z. Ruzsa, *The least nonzero digit of* $n!$ *in base* 12, Publ. Math. Debrecen. **79** no. 3–4 (2011), 395–400.

[2] E. Lipka, *Automaticity of the sequence of the last nonzero digits of* $n!$ *in a fixed base*, J. Théor. Nombres Bordeaux. **31** no. 1 (2019), 283–291.

[3] B. Sobolewski, *On the last nonzero digits of* $n!$ *in a given base*, Acta Arith. **191** no. 2 (2019), 173–189.

MINIMALNE ZBIORY GENERATORÓW GRUP SKOŃCZONYCH

Agnieszka Stocka
Wydział Matematyki, Uniwersytet w Białymstoku
ul. K. Ciołkowskiego 1M, 15-245 Białystok
stocka@math.uwb.edu.pl

Niech G będzie grupą skończoną i $\Phi(G)$ podgrupą Frattiniego G. Element grupy G, którego rząd jest potęgą liczby pierwszej nazywamy *pp-elementem.* Zbiór X pp-elementów grupy G jest *pp-niezależny*, jeśli $\langle Y, \Phi(G)\rangle \neq \langle X, \Phi(G)\rangle$ dla dowolnego $Y \subset X$ oraz jest *pp-bazą* G, jeśli X jest pp-niezależnym zbiorem generatorów G. Powiemy, że grupa G

- ma *własność* $\mathcal{B}_{pp}$, jeśli wszystkie jej pp-bazy mają taką samą ilość elementów;
- ma *własność pp-zanurzania,* jeśli dowolny pp-niezależny zbiór G zanurza się w pewnej pp-bazie;
- ma *własność pp-wymiany,* jeśli dla dowolnych dwóch pp-baz B_1, B_2 i $x \in B_1$ istnieje $y \in B_2$ taki, że $(B_1 \setminus \{x\}) \cup \{y\}$ jest pp-bazą G;
- jest *pp-matroidowa,* jeśli ma własność $\mathcal{B}_{pp}$ oraz własność pp-zanurzania.

Celem referatu jest przedstawienie struktury grup skończonych posiadających jedną lub więcej z opisanych wyżej własności. Motywacją do tych rozważań było Twierdzenie Burnside'a o bazie oraz teoria matroidów.

[1] J. Krempa, A. Stocka, *On some sets of generators of finite groups.* J. Algebra **405** (2014), 122–134.

[2] A. Lucchini, P. Spiga, *Independent set of generators of prime power order*, arXiv:2101.06226v1, (2021).

[3] A. Stocka, *Finite groups with the pp-embedding property.* Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **141** (2019), 107–119.

[4] A. Stocka, *Sets of prime power order generators of finite groups*, Algebra and Discrete Mathematics **29** (2020), 1, 129–138.

ZBIORY PUNKTÓW W PRZESTRZENIACH RZUTOWYCH, KTÓRYCH GENERYCZNE RZUTOWANIA SĄ ZUPEŁNYMI PRZECIĘCIAMI

Tomasz Szemberg
Uniwersytet Pedagogiczny w Krakowie
tomasz.szemberg@gmail.com

Niech Q będzie gładką kwadryką w $\mathbb{P}^3$. Niech $L_1, \ldots, L_s$ będą parami rozłącznymi prostymi zawartymi w Q i niech $M_1, \ldots, M_t$ będą również parami rozłącznymi prostymi w Q, które niepusto przecinają proste $L_1, \ldots, L_s$. Niech Z będzie zbiorem punktów przecięcia par prostych L_i i M_j. Generyczny rzut Z na płaszczyznę rzutową jest zupełnym przecięciem (to znaczy jest ideałowym przecięciem dwóch krzywych stopnia s i t). W 2018 roku Chiantini i Migliore wskazali istnienie w $\mathbb{P}^3$ zbioru, który nie jest takiej postaci jak Z (nie jest zawarty w szczególności w żadnej kwadryce), którego rzut też jest zupełnym przecięciem. Celem wykładu jest omówienie tego przykładu oraz wyników osiągniętych we wspólnej pracy z Piotrem Pokorą i Justyną Szpond na temat innego zbioru z taką i innymi ciekawymi właściwościami.

ZAPROSZENIE DO KOMBINATORYKI ALGEBRAICZNEJ

Piotr Śniady
Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk
psniady@impan.pl

„Kombinatoryka algebraiczna to dziedzina matematyki, która wykorzystuje metody algebry abstrakcyjnej, w szczególności teorię grup i teorię reprezentacji, w różnych kontekstach kombinatorycznych i odwrotnie, stosuje techniki kombinatoryczne do problemów algebry." [1] Podczas odczytu przedstawię charakterystyczne dla tak rozumianej kombinatoryki algebraicznej spojrzenie na świat na jednym konkretnym przykładzie związków pomiędzy:

- teorią reprezentacji grup permutacji S_n, oraz
- kombinatoryką diagramów Younga oraz tableaux Younga.

Związek ten naszkicuję, korzystając z nowego podejścia Okounkova i Vershika, które oparte jest na *elementach Jucysa–Murphy'ego* [2].

Dodatkowe materiały do wykładu (m.in. kopia slajdów) zostaną udostępnione kilka dni przed wykładem na stronie `http://psniady.impan.pl/oblicza`

[1] `https://en.wikipedia.org/wiki/Algebraic_combinatorics`

[2] T. Ceccherini-Silberstein, F. Scarabotti, F. Tolli, *Representation Theory of the Symmetric Groups: The Okounkov–Vershik Approach, Character Formulas, and Partition Algebras*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge University Press, Cambridge, 2010.

RÓWNE WARTOŚCI FUNKCJI ZLICZAJĄCYCH PARTYCJE

Maciej Ulas
Instytut Matematyki, Wydział Matematyki i Informatyki UJ
maciej.ulas@uj.edu.pl

Niech $A \subset \mathbb{N}_+$ i przez $P_A(n)$ oznaczmy liczbę partycji liczby $n \in \mathbb{N}$ o częściach ze zbioru A. Podczas referatu przedstawię pewne wyniki dotyczące istnienia i charakteryzacji dodatnich rozwiązań całkowitych równań diofantycznych postaci $P_A(x) = P_B(y)$, gdzie A, B są pewnymi zbiorami skończonymi. Sformułuję również szereg pytań i hipotez, które mogą być punktem wyjścia do dalszych badań.

O PROBLEMIE KADISONA O PODOBIEŃSTWIE

Andrzej Wiśnicki
Instytut Matematyki UP, Kraków
andrzej.wisnicki@up.krakow.pl

W 1955 roku, motywowany pracami Dixmiera i Daya o jednostajnie ograniczonych reprezentacjach grup, Kadison [2] postawił następujący problem: czy każdy ograniczony homomorfizm $u : \mathcal{A} \to B(H)$ określony na C^*-algebrze $\mathcal{A}$ jest podobny do $*$-homomorfizmu, tzn. czy istnieje taki $S \in B(H)$, że odwzorowanie $\tilde{u}(x) = S^{-1}u(x)S$ spełnia warunek: $\tilde{u}(x^*) = \tilde{u}(x)^*$? Okazuje się, że hipoteza ta jest równoważna wielu innym ważnym problemom:

- czy każdy ograniczony homomorfizm $u : \mathcal{A} \to B(H)$ jest kompletnie ograniczony? [1]
- czy każda derywacja $\delta : \mathcal{A} \to B(H)$ określona na C^*-algebrze $\mathcal{A} \subset B(H)$ jest wewnętrzna? [3]
- czy wszystkie C^*-algebry mają skończoną długość? [4]
- czy wszystkie algebry von Neumanna są hiperrefleksywne? [5].

Lista problemów równoważnych jest znacznie dłuższa.

Celem referatu jest przedstawienie nowego podejścia do problemu Kadisona opartego na twierdzeniu o punkcie stałym w przestrzeni ℓ^∞.

[1] U. Haagerup, *Solution of the similarity problem for cyclic representations of C^*-algebras*, Ann. of Math. (2) **118** (1983), 215–240.

[2] R.V. Kadison, *On the othogonalization of operator representations*, Amer. J. Math. 77 (1955), 600–620.

[3] E. Kirchberg, *The derivation problem and the similarity problem are equivalent*, J. Operator Theory **36** (1996), no. 1, 59–62.

[4] G. Pisier, *The similarity degree of an operator algebra*, St. Petersburg Math. J. **10** (1999), 103–146.

[5] G. Pisier, *Similarity problems and completely bounded maps*, Springer-Verlag, Berlin, 2001.

O GRUPACH ADDYTYWNYCH PIERŚCIENI UNITARNYCH

Mateusz Woronowicz
Politechnika Białostocka
m.woronowicz@pb.edu.pl

Bezpośrednim przyczynkiem do powstania referatu było pytanie o grupy addytywne pierścieni unitarnych, które padło podczas jednej z poprzednich edycji konferencji *Oblicza Algebry*. W trakcie związanej z nim dyskusji została przywołana dostępna w Internecie praca:

S. Beraz and G. Călugăreanu, *Additive groups of rings with identity*,
http://math.ubbcluj.ro/~calu/ident.pdf,

która według wiedzy referującego nie została opublikowana w żadnym czasopiśmie matematycznym. Zawiera ona, między innymi, klasyfikację grup abelowych G, których struktura determinuje unitarność wszystkich łącznych pierścieni z niezerowym mnożeniem o grupie addytywnej izomorficznej z grupą G. Autorzy tej pracy nie ustrzegli się jednak pewnej istotnej nieścisłości, która poddaje w wątpliwość poprawność przedstawionego rozumowania i związanych z nim wyników. Mianowicie, dokonali oni nieuzasadnionego utożsamienia składnika prostego dowolnego łącznego pierścienia ze składnikiem prostym jego grupy addytywnej. Podczas referatu zostanie zaprezentowany poprawny i kompletny dowód Theorem 1 pochodzącego z cytowanej wyżej pracy pozwalający na konkluzję, że założenie łączności rozważanych pierścieni nie ma wpływu na uzyskane wyniki. Podstawowe wiadomości z zakresu grup addytywnych pierścieni ułatwiające zrozumienie referatu znajdują się np. w [1, Chapters 1 & 2] i [2, Chapter 4].

[1] S. Feigelstock, *Additive groups of rings. Vol. 1*, Pitman Advanced Publishing Program, Boston, 1983.

[2] L. Fuchs, *Abelian Groups*, Springer Monographs in Mathematics, Springer International Publishing, Cham, Heidelberg, New York, Dordrecht, London, 2015.

PARĘ UWAG NA TEMAT GRUP ARCHIPELAGU

Andreas Zastrow
Uniwersytet Gdański
zastrow@mat.ug.edu.pl

Standardowymi przykładami przestrzeni topologicznych, które w teraźniejszym językiem są nazywane „niehomotopijnie hausdorffowskie”, są przestrzeń Griffithsa z pięćdziesiątych latach, i Harmoniczny Archipelag, skonstruowany przez Bogleya i Sieradskiego. Obie przestrzeni mają jakąś reputację jako dobre znane kontrprzykłady w topologii. Grupa podstawowa ostatniej wymienionej przestrzeni zostaje zbadana, i było pokazane, że ona jest uniwersalną przeliczną lokalnie wolną grupą [2], a dodatkowo ta grupa motywowała definicję tzw. „Grup Archipelagu” [1]. Na początku 2019 r. K. Eda rozpoczął dyskusję, czy wyniki [1] mogą być poprawne. W tym referacie chciałem przedstawić konkluzje, do których doszedłem po przemyśleniu stwierdzeń tej pracy i Kasuyi Edy.

Krótko mówiąc, moje konkluzji były, że zgadzałem z stwierdzeniami K. Edy (które w tej chwilę są sformułowane w preprincie [3]), że z metodami pracy [1] tylko w istocie słabsze własności uniwersalności grup Archipelagu mogą być udowodnione niż stwierdzone tam. W przeciwieństwie do tego, co jest stwierdzone w tej pracy, nie jest jasne, że typ izomorfizmu grupy Archipelagu jest już determinowany przez podstawowe dane kardinalności (ilość elementów w grupie i ilość elementów rzędu dwa) generującej grupy, ale, jeśli zgadzają te dane, to tylko pozwala na konstrukcję homomorfizmu „na” między dwoma grupami Archipelagu, ale to też udaje się, jeśli mamy nieizomorficzne grupy z tych danych kardinalności zgadzających.

Dodatkowo, kiedy w ten sposób przemyślałem pracę [1], doszedłem do konkluzji, że Tw. 5 tej pracy, które stwierdza, że grupy Archipelagu są grupami podstawowymi przestrzeni topologicznych, które są skonstruowane jako specjalne stożki odwzorowań, tylko mogą być poprawne, jeśli wymaga się dodatkowych warunków, które według [1] nie są wymagane dla takich przestrzeni, które są wykorzystane w konstrukcji odpowiednich stożków odwzorowań. Jeśli czas na to pozwali, będę szkicować odpowiedni argument złożoności, które pokazuje, że w innym wypadku konkluzja Tw. 5 może nie zachodzić.

[1] G.R. Conner, W. Hojka, M. Meilstrup, *Archipelago groups*, Proc. Amer. Math. Soc. **143** (2015), no. 11, 4973–4988.

[2] W. Hojka, *The harmonic archipelago as a universal locally free group*, J. Algebra **437** (2015), 44–51.

[3] K. Eda, *Question and homomorphisms on Archipelago groups*, preprint, available from: http://www.logic.info.waseda.ac.jp/~eda/pdf/question.pdf

WIELOMIANY PARTYCJI M-ARNYCH

Błażej Żmija
Uniwersytet Jagielloński
blazej.zmija@im.uj.edu.pl

Niech $M = (m_j)$ będzie ciągiem liczb naturalnych takim, że $m_0 = 1$ oraz $m_j > 1$ dla $j > 0$. Dla dowolnej liczby naturalnej n, n-tym wielomianem partycji M-arnych nazywamy wielomian $p_M(n, t)$ taki, że dla dowolnego k współczynnik przy t^k jest równy liczbie przedstawień n na sumę dokładnie k (niekoniecznie różnych) iloczynów postaci $m_0 \ldots m_j$.

W trakcie referatu przedstawione zostaną podstawowe własności wielomianów partycji M-arnych. Skupimy się przede wszystkim na badaniu zer tych wielomianów. W szczególności scharakteryzujemy dla niektórych ciągów M pierwiastki wymierne wielomianów $p_M(n, t)$ oraz pokażemy, że wszystkie zespolone pierwiastki tych wielomianów leżą w kole o promieniu 2 i środku w zerze.