TEORIA PICARDA-VESSIOTA I HIPOTEZA JAKOBIANOWA - PODEJŚCIE EFEKTYWNE

Elżbieta Adamus
Wydział Matematyki Stosowanej, Akademia Górniczo–Hutnicza, Kraków
esowa@agh.edu.pl

Niech k będzie ciałem algebraicznie domkniętym charakterystyki zero. Niech $F = (F_1, \dots, F_n)\colon k^n \to k^n$ będzie odwzorowaniem wielomianowym i niech J_F oznacza macierz Jacobiego odwzorowania F. Hipoteza Jakobianowa mówi, że jeśli $\det(J_F) = \mathrm{const} \neq 0$, to F jest globalnie odwracalne i odwzorowanie odwrotne również jest wielomianowe. Klasyczne już twierdzenie Campbella [2] mówi, że odwzorowanie wielomianowe o stałym jakobianie takie, że $k(F_1, \dots, F_n) \subset k(X_1, \dots, X_n)$ jest rozszerzeniem Galois, jest automorfizmem wielomianowym.

W 2011 T. Crespo i Z. Hajto uogólnili twierdzenie Campbella [3] formułując równoważną wypowiedź Hipotezy Jakobianowej w języku teorii Picarda–Vessiota. Teorię Picarda–Vessiota można opisać jako różniczkową teorię Galois dla równań różniczkowych liniowych jednorodnych. Ich rezultaty dostarczają kryterium wykorzystującego pojęcie wrońskianu uogólnionego i pozwalającego badać, czy dane odwzorowanie wielomianowe $F\colon k^n \to k^n$, gdzie k jest ciałem algebraicznie domkniętym charakterystyki zero, o stałym niezerowym jakobianie jest automorfizmem wielomianowym. Jednakże efektywność tego kryterium jest ograniczona z uwagi na dużą liczbę wrońskianów, które należy rozważyć, gdy n jest duże. Celem referatu jest zaprezentowanie uproszczonej wersji kryterium wrońskianowego. Aby uzasadnić, że odwzorowanie wielomianowe $F\colon k^n \to k^n$ o stałym niezerowym jakobianie jest automorfizmem wielomianowym, wystarczy rozważyć $\frac{1}{2}n^2(n+1) - n$ wyznaczników. Prezentowane wyniki pochodzą ze wspólnej pracy z P. Bogdanem i Z. Hajto [1].

[1] E. Adamus, P. Bogdan, Z.Hajto, *An effective approach to Picard-Vessiot theory and the Jacobian Conjecture* (2015), submitted.

[2] L.A. Campbell, *A condition for a polynomial map to be invertible*, Math. Annalen **205** (1973), 243-248.

[3] T. Crespo, Z. Hajto, *Picard-Vessiot theory and the Jacobian problem*, Israel Journal of Mathematics **186** (2011), 401-406.

NIL PIERŚCIENIE, W KTÓRYCH WSZYSTKIE PODPIERŚCIENIE WŁAŚCIWE SĄ X-NILPOTENTNYMI

Orest Artemovych
Instytut Matematyki, Politechnika Krakowska
artemo@usk.pk.edu.pl

Niech R będzie pierścieniem łącznym. Pierścień R jest nazywany T-*nilpotentnym prawostronnie* (patrz: [1]), jeśli dla każdego ciągu $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ jego elementów istnieje liczba całkowita n taka, że

$$a_n a_{n-1} \cdots a_1 = 0.$$

Klasa pierścieni T-nilpotentnych prawostronnie jest domknięta względem podpierścieni, obrazów homomorficznych, rozszerzeń oraz sum prostych. Pierścień R jest T-nilpotentny prawostronnie wtedy i tylko wtedy, gdy każdy jego niezerowy obraz homomorficzny ma niezerowy anihilator prawostronny. Klasa pierścieni T-nilpotentnych prawostronnie we właściwy sposób zawiera się między klasą pierścieni nilpotentnych a klasą pierścieni lokalnie nilpotentnych.

Pierścień R jest nazywany r-*nilpotentnym* (patrz: [2]), jeśli dla każdego ciągu $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ jego elementów istnieją permutacja $\{a_{\varrho(i)}\}_{i=1}^{\infty}$ oraz liczba całkowita n takie, że

$$a_{\varrho(n)} a_{\varrho(n-1)} \cdots a_{\varrho(1)} = 0.$$

Pierścień R jest nazywany M-*nilpotentnym* (patrz: [3]), jeśli dla każdego ciągu dwustronnego $\{a_i \mid i \in \mathbb{Z}\}$ jego elementów istnieją liczby całkowite $m, k \quad (k \geq 0)$ takie, że

$$a_m a_{m+1} \cdots a_{m+k} = 0.$$

Każdy pierścień T-nilpotentny prawostronnie jest M-nilpotentny. Zbiór $\mathrm{mann} R = \{a \in R \mid RaR = 0\}$ jest nazywany *anihilatorem środkowym* pierścienia R. Pierścień R jest M-nilpotentny wtedy i tylko wtedy, gdy każdy jego niezerowy obraz homomorficzny ma niezerowy anihilator środkowy.

Referat zawiera nowe wyniki autora o nil pierścieniach, w których wszystkie podpierścienie właściwe są X-nilpotentnymi, gdzie $X \in \{T, r, M\}$.

[1] H. Bass, *Finitistic dimension and homological generalization of semi-primary rings*, Trans. Amer. Math. Soc. **95** (1960), 466–488.

[2] B.J. Gardner, *Some nil ring properties related T-nilpotence*, Bull. Austral. Math. Soc. **46** (1992), 519–523.

[3] A.D. Sands, *On M-nilpotent rings*, Proc. Royal Soc. Edinburgh **93A** (1982), 63–70.

DOMKNIĘCIE NORMALNE *ADDING MACHINE* W GRUPIE AUTOMORFIZMÓW DRZEWA 2-ADYCZNEGO

Beata Bajorska
Instytut Matematyki, Politechnika Śląska
beata.bajorska@polsl.pl

Jak pokazano w [1], klasę sprzężoności odometru (ang. (*binary*) *adding machine*) tworzą wszystkie automorfizmy poziomowo przechodnie (ang. *level-transitive* (*spherically homogeneous*)). Określimy (jawnie) klasę sprzężoności oraz domknięcie normalne odometru w grupie automorfizmów drzewa 2-adycznego z korzeniem w notacji Kałużnina [2]. Podamy również kilka własności.

[1] S. Sidki, *Regular Trees and their Automorphisms*, Monografias de Matemática, **56**, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1998.

[2] L. Kaloujnine, *"Uber eine Verallgemeinerung der p-Sylow-gruppen symmetrischer Gruppen*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar., **2**(1951), 197-221. (in Russian, German summary)

$2^{\mathfrak{c}}$-GENEROWANE WOLNE ALGEBRY W $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ ($\mathbb{C}^{\mathbb{C}}$)

Artur Bartoszewicz
Instytut Matematyki, Politechnika Łódzka
artur.bartoszewicz@p.lodz.pl

Niech $\mathcal{L}$ będzie algebrą, a A jej niepustym podzbiorem. Dla danej liczby kardynalnej κ mówimy, że zbiór A jest κ–algebraizowalny, jeśli $A \cup \{0\}$ zawiera κ-generowaną algebrę. Jeśli $\kappa > \omega$, to A jest κ algebraizowalny wtedy i tylko wtedy gdy zawarta w $A \cup \{0\}$ algebra jest κ–wymiarową przestrzenią liniową. Mówimy ponadto, że A jest silnie κ-algebraizowalny, gdy $A \cup \{0\}$ zawiera wolną algebrę o κ generatorach. Problem algebraizowalności pewnych klas funkcji, w naturalny sposób pojawiających się w analizie matematycznej, był intensywnie badany w ciągu ostatnich kilkunastu lat. Jednak dopiero niedawno pojawiły się prace o $2^{\mathfrak{c}}$–algebraizowalności lub silnej $2^{\mathfrak{c}}$–algebraizowalności podzbiorów $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ lub $\mathbb{C}^{\mathbb{C}}$. Praca [1] zawiera pierwsze twierdzenia o silnej $2^{\mathfrak{c}}$–algebraizowalności pewnych klas funkcji udowodnione w ZFC. Dowody oparte są na następującym, podstawowym dla kolejnych rezultatów twierdzeniu:

Twierdzenie 1 *bf* 1 *Niech X będzie zbiorem o mocy κ, gdzie κ jest liczbą kardynalną spełniającą warunek $\kappa^\omega = \kappa$. Niech dalej I będzie podzbiorem $\mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$ o niepustym wnętrzu. Wówczas istnieje wolna algebra w $\mathbb{R}^X$ lub $\mathbb{C}^X$ o 2^κ generatorach $\{f_\xi : \xi < 2^\kappa\}$ taka, że dla każdego wielomianu P k-zmiennych bez wyrazu wolnego, $P(f_{\xi_1}, ..., f_{\xi_k})$ odwzorowuje X na $P(I^k)$.*

Szkic dowodu: Niech $Y = ([0,1] \times \kappa)^{\mathbb{N}}$ i niech $\{A_\xi : \xi < 2^\kappa\}$ będzie rodziną niezależną w $\mathcal{P}(\kappa)$. Dla każdego $\xi < 2^\kappa$ definiujemy $\bar{f}_\xi(t_1, y_1, t_2, y_2, ...) = \prod_{n=1}^{\infty} t_n^{\chi_{A_\xi}(y_n)}$. Niech dalej $\phi \colon X \to Y$ i $\psi \colon [0,1] \to I$ będą bijekcjami. Wówczas generatorami konstruowanej algebry są funkcje $f_\xi = \psi \circ \bar{f}_\xi \circ \phi$.

Używając powyższego twierdzenia dowodzimy między innymi silną $2^{\mathfrak{c}}$–algebraizowalność następujących zbiorów:

- funkcji doskonale wszędzie suriektywnych na $\mathbb{C}$;
- funkcji silnie wszędzie suriektywnych na $\mathbb{C}$;
- nigdzie ciągłych funkcji Darboux na $\mathbb{R}$;
- funkcji, dla których zbiorem punktów ciągłości jest ustalony zbiór typu G_δ o $\mathfrak{c}$–gęstym dopełnieniu.

Twierdzenie 1 zostało ostatnio istotnie uogólnione w pracy [2].

[1] A. B., S. Głąb, A. Paszkiewicz, *Large free linear algebras of real and complex functions*, Linear Algebra Appl. **438** (2013), no. 9, 3689–3701.

[2] T. Banakh, A. B., S. Głąb, *Large free sets in powers of universal algebras*, Algebra Univers. **71** (2014) 23–29.

PEWNE OGÓLNE METODY W ALGEBRAIZOWALNOŚCI

Marek Bienias
Instytut Matematyki, Politechnika Łódzka
marek.bienias88@gmail.com

W ciągu ostatnich 15 pojawiło i stało się bardzo popularne wśród matematyków z wielu ośrodków naukowych, nowe pojęcie wielkości zbioru. Mianowicie, zbiór $A \subseteq \mathcal{L}$ (gdzie $\mathcal{L}$ jest przestrzenią liniową, algebrą, przestrzenią Banacha) można nazwać **dużym,** jeżeli $A \cup \{0\}$ zawiera strukturę algebraiczną dużej liczby koniecznych generatorów. Idea ta stoi za następującymi pojęciami:

Definicja 1 *Niech κ będzie liczbą kardynalną, $\mathcal{L}$ będzie przemienną algebrą oraz $A \subseteq \mathcal{L}$. Powiemy, że A jest:*

1. κ-algebraizowalny, *jeżeli $A \cup \{0\}$ zawiera κ-generowaną algebrę B;*
2. silnie κ-algebraizowalny, *jeżeli $A \cup \{0\}$ zawiera κ-generowaną algebrę wolną B.*

W ostatnich latach opublikowano dużą liczbę artykułów naukowych w tej tematyce, pokazujących wyniki dotyczące algebraizowalności wielu zbiorów naturalnie pojawiających się w analizie matematycznej. Zważywszy na ten fakt, wydaje się, że obecnie najbardziej pożądanymi wynikami są ogólne metody obejmujące znane już, jak i pozwalające tworzyć nowe konstrukcje. W prezentowanym referacie opisane zostaną dwie metody: *niezależnych zbiorów Bernsteina* oraz *exponential like*, dzięki którym można udowodnić wiele wyników dotyczących algebraizowalności i silnej algebraizowalności podzbiorów algebr $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, \mathbb{C}^{\mathbb{C}}\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, C[0,1], \ell_\infty$. Spośród zaprezentowanych aplikacji tych metod, znaczna większość jest najlepszym możliwym wynikiem w terminach skomplikowania budowanej struktury algebraicznej oraz mocy zbioru generatorów tejże struktury (w większości przypadków $\mathfrak{c}$ lub $2^{\mathfrak{c}}$).

[1] A. Bartoszewicz, M. B., M. Filipczak, S. Głąb, *Strong $\mathfrak{c}$-algebrability of strong Sierpiński-Zygmund, smooth nowhere analytic and other sets of functions*, J. Math. Anal. Appl. **412** (2014), no. 2, 620–630.

[2] A. Bartoszewicz, M. B., S. Głąb, Independent Bernstein sets and algebraic constructions, J. Math. Anal. Appl. 393 (2012) 138–143.

[3] A. Bartoszewicz, M. B., S. Głąb, *Lineability, algebrability and strong algebrability of some sets in $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ and $\mathbb{C}^{\mathbb{C}}$*, Traditional and present-day topics in real analysis, 213–232, Faculty of Mathematics and Computer Science, University of Łódź, Łódź, 2013.

O P–PODGRUPACH SYLOWA GRUP AUTOMORFIZMÓW DRZEW P–ADYCZNYCH Z KORZENIEM

Agnieszka Bier
Instytut Matematyki, Politechnika Śląska
agnieszka.bier@polsl.pl

Jako grupy uniwersalne względem zanurzeń dla klas rezydualnie–p grup, p–podgrupy Sylowa w grupach automorfizmów drzew p–adycznych z korzeniem są znaczącymi i szeroko znanymi przykładami pro–p grup. W szczególności wszystkie znane przykłady grup rezydualnie skończonych typu Burnside'a mogą być zanurzone w odpowiednią p–podgrupę Sylowa P_∞, a większość z nich została wprost skonstruowana jako podgrupy tej grupy. Z tego powodu struktura i własności grupy P_∞ pozostają interesującym przedmiotem badań.

W referacie omówione będą konstrukcja oraz własności grupy P_∞, a także scharakteryzowane zostaną wybrane jej podgrupy. W szczególności, za pomocą odpowiedniej reprezentacji elementów grupy P_∞ [2], umożliwiającej ich częściowe uporządkowanie, zdefiniowane i omówione zostaną tzw. podgrupy ideałowe. Referat obejmuje zarówno przegląd znanych wyników, jak i prezentację wyników pracy autorki i V. Sushchansky'ego opublikowanych w [1].

[1] A. Bier, V. Sushchansky, *Kaluzhnin's representations od Sylow p-subgroups of automorphism groups of p-adic rooted trees*, Algebra Discr. Math. 19 (2015), no.1.

[2] L. Kaluzhnin, *Sur le groupe P_∞ des tableaux infinis*, C. R. Math. Rep. Acad. Sci. 224 (1947), 1097–1092.

TEORIA PICARDA-VESSIOTA I HIPOTEZA JAKOBIANOWA. EFEKTYWNE OBLICZENIA.

Paweł Bogdan
Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Jagielloński
bogdan@ii.uj.edu.pl

Hipoteza jakobianowa mówi, że jeżeli dla zadanego odwzorowania wielomianowego $F\colon k^n \to k^n$ (gdzie k jest ciałem charakterystyki 0) jakobian jest niezerową stałą to F jest globalnie odwracalne oraz F^{-1} jest również odwzorowaniem wielomianowym.

Opisanie hipotezy jakobianowej w języku teorii Picarda-Vessiota (tak jak w pracy [1]) daje narzędzie do efektywnego sprawdzania, czy hipoteza jest prawdziwa dla zadanego odwzorowania wielomianowego, bez potrzeby odwracania odwzorowania. Tym narzędziem jest kryterium wrońskianowe.

W trakcie prac nad artykułem [2] powstały programy napisane w różnych środowiskach algebry obliczeniowej: Sage, Maple oraz Magma. W moim referacie pokażę, jakie mechanizmy poszczególnych środowisk są pomocne w obliczeniach wykorzystujących kryterium wrońskianowe. Opowiem w jaki sposób można przyspieszyć obliczenia wykorzystując obliczenia równoległe oraz łączenie zalet poszczególnych środowisk algebry symbolicznej. Przedstawię obliczenia dla konkretnych przykładów.

[1] T. Crespo, Z. Hajto, *Picard-Vessiot theory and the Jacobian problem*, Israel Journal of Mathematics **186** (2011), 401-406.

[2] E. Adamus, P. Bogdan, Z. Hajto, *An effective approach to Picard-Vessiot theory and the Jacobian Conjecture* (2015), submitted.

NIERÓWNOŚĆ CHĄDZYŃSKIEGO-PŁOSKIEGO W PIERŚCIENIACH LOKALNYCH

Szymon Brzostowski
Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Łódzki
brzosts@math.uni.lodz.pl

Niech $f = (f_1, \dots, f_n) : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^n, 0)$ będzie odwzorowaniem holomorficznym skończonym spełniającym $f(0) = 0$. *Wykładnikiem Łojasiewicza* Ł(f) *odwzorowania* f nazywamy

$$\text{Ł}(f) := \inf \{q \in \mathbb{Q}_+ : \|f(z)\| \geqslant C \cdot \|z\|^q, \text{ dla pewnego } C > 0 \text{ i wszystkich } z \text{ bliskich } 0\}.$$

J. Chądzyński [1, dla $n = 2$] oraz A. Płoski [4, dowolne n] udowodnili następującą nierówność wiążącą Ł(f) z krotnością geometryczną $m(f)$ odwzorowania f:

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant n} (\mathrm{ord} f_i) \leqslant \text{Ł}(f) \leqslant m(f) - \prod_{1 \leqslant i \leqslant n} \mathrm{ord} f_i + \max_{1 \leqslant i \leqslant n} (\mathrm{ord} f_i).$$

W trakcie referatu przedstawimy uogólnienie powyższego wzoru (uzyskane wspólnie z T. Rodakiem) na szeroką klasę (noetherowskich przemiennych) pierścieni lokalnych $(R, \mathfrak{m})$. Punktem wyjścia naszych rozważań jest równoważna definicja wykładnika Łojasiewicza Ł$(\mathcal{I})$ ideału $\mathfrak{m}$-prymarnego $\mathcal{I} \lhd R$ podana przez M. Lejeune-Jalabert i B. Teissiera [3]. Definicja ta jest wyrażona w terminach całkowitego domknięcia ideału $\mathcal{I}$ (zob. [2]); rolę $m(f)$ odgrywa zaś klasyczna krotność Hilberta–Samuela $e(\mathcal{I})$ ideału $\mathcal{I}$. Nadmieniamy, że oszacowania powyższego typu na Ł(f), jako stosunkowo proste do wyliczenia w sposób algorytmiczny, znajdują zastosowanie w konstruktywnych wersjach lokalnego Nullstellensatza.

[1] Jacek Chądzyński. *On the order of an isolated zero of a holomorphic mapping*, Bull. Polish Acad. Sci. Math., **31(3-4)** (1983), 121–128.

[2] Craig Huneke i Irena Swanson. *Integral closure of ideals, rings, and modules*, London Mathematical Society Lecture Note Series, **336**, Cambridge University Press, Cambridge, 2006.

[3] Monique Lejeune-Jalabert i Bernard Teissier. *Clôture intégrale des idéaux et équisingularité*, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6), **17(4)** (2008), 781–859. With an appendix by Jean-Jacques Risler. An updated version of: *Clôture intégrale des idéaux et équisingularité.* Centre de Mathématiques, Université Scientifique et Medicale de Grenoble (1974).

[4] Arkadiusz Płoski. *Sur l'exposant d'une application analytique. I*, Bull. Polish Acad. Sci. Math., **32(11-12)** (1984), 669–673.

OBLICZE DZIEWIĘTNASTOWIECZNEJ ALGEBRY NA POLSKICH UCZELNIACH

Danuta Ciesielska

Instytut Matematyki, Uniwersytet Pedagogiczny w Krakowie

smciesie@cyfronet.krakow.pl

Pierwsza część wykładu to opis kształtowania się polskich towarzystw naukowych w II połowie XIX wieku oraz próba oceny ich roli oraz w percepcji matematyki. Następnie przedstawiona zostanie informacja o polskich podręcznikach oraz wykładach z algebry i teorii wyznaczników w latach 1865-1890, prowadzonych na polskich uczelniach lub publikowanych przez polskie towarzystwa naukowe.

Część zasadnicza wykładu będzie dotyczyć pierwszego polskiego podręcznika z algebry. Autorem monografii *Zasady algebry wyższéj* był Władysława Zajączkowskiego[1], który w swej akademickiej karierze miał okazję wykładać na każdej z polskich uczelni drugiej połowy XIX wieku. We wstępie do książki autor napisał „Jéj przeznaczeniem jest zaradzenie brakowi odpowiedniego dzieła, któreby, jako podręcznik, można polecić słuchaczom". Szczegółowo zostaną omówione dwa fragmenty – szkic dowodu twierdzenia Bézouta o krzywych algebraicznych oraz rozdział „Rozwiązywanie równań algebraicznych", w którym między innymi zamieszczono dowód twierdzenia Abela-Ruffiniego.

Ponadto będzie mowa o wykładzie Władysława Kretkowskiego[2] „Teorya czwarków Wiliama Hamiltona wraz z niektóremi zastosowaniami do geometryi", który odbył się na Uniwersytecie Lwowskim w roku akademickim 1882/83 oraz jego notatkach (datowanych, w przybliżeniu, na 1870 rok), które są starannie opracowanym wykładem z podstaw klasycznej teorii Galois. Informacje o tematyce wykładu z teorii kwaternionów oraz klasycznej teorii Galois pochodzą z niepublikowanych archiwaliów ze spuścizny Władysława Kretkowskiego.

[1]Władysław Zajączkowski (1837-1898) – matematyk, absolwent, doktor i wykładowca Uniwersytetu Jagiellońskiego, profesor Carskiego Uniwersytetu w Warszawie, Politechniki we Lwowie; był dziekanem Wydziału Inżynierii oraz Wydziału Budownictwa Politechniki we Lwowie, dwukrotnie był rektorem tej uczelni, prowadził również wykłady na Uniwersytecie we Lwowie. Zajączkowski był członkiem Akademii Umiejętności w Krakowie, Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu oraz członkiem Rady Szkolnej Krajowej w Galicji.

[2]Władysław Kretkowski (1840-1910) – absolwent paryskiej Sorbony (licencjat z matematyki) oraz Szkoły Dróg i Mostów w Paryżu. Prywatny docent Politechniki oraz Uniwersytetu we Lwowie; doktorat z matematyki obronił na Uniwersytecie Jagiellońskim. Był członkiem redakcji wydawanego do dziś „Czasopisma Technicznego" (Lwów, teraz Kraków). Ogromny majątek w spadku zapisał na rzecz rozwoju krakowskiej matematyki. Beneficjentami powstałego dzięki temu zapisowi „Funduszu im. dra W. Kretkowskiego" byli między innymi: Hoborski, Leja, Rosenblatt, Stożek, Wilkosz, a szczególnie Sleszyński. Uczestnik powstania styczniowego.

OPERATORY PICARDA–FUCHSA CZWARTEGO RZĘDU

Sławomir Cynk
Instytut Matematyki, Uniwersytet Jagielloński
slawomir.cynk@uj.edu.pl

Dla jednoparametrowej rodziny rozmaitości Calabi–Yau definiujemy operator różniczkowy zwany operatorem Picarda–Fuchsa, liniowy operator różniczkowy rzędu cztery spełniany przez całkę okresów. Rozmaitości Calabi–Yau są trójwymiarowym odpowiednikiem krzywych eliptycznych, Euler odkrył, że całki eliptyczne spełniają jednorodne, liniowe równanie różniczkowe rzędu dwa, którego jedyne rozwiązanie holomorficzne jest zadane przez szereg hipergeometryczny. Operatory Picarda–Fuchsa odgrywają kluczową rolę w Hipotezie Symetrii Lustrzanej.

Przedstawię obliczenia operatorów Picarda–Fuchsa dla pewnych rodzin rozmaitości Calabi–Yau, szczegółowo omówię przykłady z różnym zachowaniem punktów osobliwych, w szczególności punktów Maksymalnej Unipotentnej Monodromii (MUM). Podam przykłady bez punktów MUM oraz z trzema punktami MUM.

[1] S. Cynk, D. van Straten, *Calabi-Yau conifold expansions*. Arithmetic and geometry of K3 surfaces and Calabi-Yau threefolds, 499–515, Fields Inst. Commun., 67, Springer, New York, 2013.

PEWNA MIARA ZEWNĘTRZNA NA PIERŚCIENIU PRZEMIENNYM

Dariusz Dudzik
Instytut Matematyki, Uniwersytet Pedagogiczny w Krakowie
dariusz.dudzik@gmail.com

Niech $\mathcal{P} \subseteq \operatorname{Spec}(R)$ będzie taką rodziną ideałów pierwszych pierścienia przemiennego R z jedynką, że

$$\bigcup \mathcal{P} = R \setminus R^{\times},$$

gdzie $R^{\times}$ to zbiór elementów odwracalnych w R. Niech ponadto μ będzie miarą nieujemną na $\mathcal{P}$. Miarę zewnętrzną $\mu^* \colon 2^R \longrightarrow [0, +\infty]$ indukowaną przez μ definiujemy w następujący sposób:

$$\mu^*(A) = \inf_{\mathcal{S} \in \Omega(A)} \mu(\mathcal{S}),$$

gdzie

$$\Omega(A) = \left\{ \mathcal{S} \subset \mathcal{P} \colon \mathcal{S} \text{ jest zbiorem } \mu\text{-mierzalnym}, \bigcup \mathcal{S} \supseteq A \setminus R^{\times} \right\}.$$

Okazuje się, że μ^* ma dość interesujące własności algebraiczne. W referacie omówimy te własności, podamy kilka naturalnych przykładów miar μ^* (przykłady będą związane, m.in., z teorią liczb i teorią algebr Banacha) oraz przedstawimy pewne ogólne uwagi dotyczące związków między miarami na pierścieniu R i miarami na jego spektrum.

[1] M. F. Atiyah & I. G. MacDonald, *Introduction to Commutative Algebra*, Westview Press, 1994.

[2] H. Federer, *Geometric Measure Theory*, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1969.

[3] W. Rudin, *Functional Analysis*, McGraw-Hill, 1991.

O NIEKTÓRYCH ZASTOSOWANIACH SKOŃCZENIE WYMIAROWYCH ALGEBR LIE'GO LOKALNYCH GRUP LIE'GO PRZEKSZTAŁCEŃ PUNKTOWYCH

Vasyl Fedorchuk

Uniwersytet Pedagogiczny im. Komisji Edukacji Narodowej w Krakowie;
Instytut Problemów Stosowanych Mechaniki i Matematyki im. Jarosława Pidstryhacza Narodowej Akademii Nauk Ukrainy we Lwowie
fedorchuk@up.krakow.pl

Planuję omówić niektóre zastosowania skończenie wymiarowych algebr Lie'go lokalnych grup Lie'go przekształceń punktowych w geometrii, teorii równań różniczkowych oraz w fizyce teoretycznej i matematycznej.

[1] S. Lie, F. Engel, *Theorie der Transformationsgruppen: In 3 Bd.*, **Bd 1–3**, Teubner, Leipzig, 1888, 1890, 1893.

[2] G.W. Bluman, J. Cole, *Similarity Methods for Differential Equations*, Springer, Berlin, 1974.

[3] L.V. Ovsiannikov, *Group Analysis of Differential Equations*, Academic Press, New York, 1982.

[4] N.H. Ibragimov, *Transformation Groups Applied to Mathematical Physics*, Reidel, Boston, 1985.

[5] P.J. Olver, *Applications of Lie Groups to Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, 1986.

[6] V.I. Fushchich, L.F. Barannik, and A.F. Barannik, *Subgroup Analysis of Galilei and Poincaré Groups and the Reduction of Nonlinear Equations*(In Russian), Naukova Dumka, Kiev,1991.

[7] W.I. Fushchich, W.M. Shtelen, and N.I. Serov, *Symmetry Analysis and Exact Solution of Equations of Nonlinear Mathematical Physics.*, Kluver Academic Publisher, Dordrecht, 1993.

[8] W.I. Fushchych, A.G. Nikitin, *Symmetries of Equations of Quantum Mechanics*, Allerton Press Inc., New York, 1994.

WŁASNOŚĆ STEINHAUSA I SUMY ALGEBRAICZNE ZBIORÓW

Małgorzata Filipczak
Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Łódzki
malfil@math.uni.lodz.pl

Załóżmy, że $\langle X, +, \tau\rangle$ jest grupą topologiczną. Mówimy, że zbiór $A \subset X$ ma *własność Steinhausa* gdy $Int\,(A - A) \neq \emptyset$.

W 1991 roku Crnjac, Guljaš i Miller wykazali, że istnieje zwarty podzbiór prostej A mający własność Steinhausa taki, że $A + A$ jest zbiorem brzegowym. W dowodzie wykorzystali obserwację, że zbiór $F = \{0, 2, 6\}$, rozważany jako podzbiór grupy $\mathbb{Z}_7$ spełnia warunek $F -_7 F = \mathbb{Z}_7$ mimo, że $F +_7 F \neq \mathbb{Z}_7$.

Poszukiwania podzbiorów grup $\mathbb{Z}_p$ o dużych różnicach i małych sumach okazały się mieć długą historię sięgającą Sophie Piccard. Pokażemy, że:

- Jeżeli $p \geq 6$ to istnieje zbiór F spełniający warunki

$$F -_p F = \mathbb{Z}_p \quad \text{oraz} \quad \mathrm{F} +_\mathrm{p} \mathrm{F} \neq \mathbb{Z}_\mathrm{p}.$$

- Jeżeli $p = 29, 31, 33$ lub $p \geq 35$ to istnieje zbiór F spełniający warunki

$$F -_p F = \mathbb{Z}_p \quad \text{oraz} \quad \mathrm{F} +_\mathrm{p} \mathrm{F} +_\mathrm{p} \mathrm{F} \neq \mathbb{Z}_\mathrm{p}.$$

Omówimy też wyniki Haighta, Jacksona, Williamsona i Woodalla dotyczące analogicznych wyników dla k–sum przy $k > 3$.

[1] M. Crnjac, B. Guljaš, H.I. Miller, *On some questions of Ger, Grub and Kraljević*, Acta Math. Hung. **57** (3-4) (1991), 253–257.

[2] J. A. Haight, *Difference covers which have small k-sums for any k*, Mathematika **20** (1973), 109–118.

[3] T. H Jackson, J. H. Williamson and D. R. Woodall, *Difference-covers that are not k-sum-covers. I*, Proc. Camb. Phil. Soc. 72 (1972), 425-438.

GEOMETRYCZNE REPREZENTACJE GRUPY GALOIS

Wojciech Gajda
Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Adama Mickiewicza w Poznaniu
gajda@amu.edu.pl

Podczas wykładu postaram się przybliżyć słuchaczom kilka zagadnień współczesnej geometrii arytmetycznej. Będziemy mówili o rozmaitościach algebraicznych określonych nad dowolnym ciałem K, o ich grupach kohomologii étale i o działaniach absolutnej grupy Galois. Najciekawsze z tych zagadnień dotyczą przypadku, gdy K jest ciałem liczb wymiernych.

RÓWNOWAŻNOŚĆ WITTA CIAŁ FUNKCJI NAD CIAŁAMI GLOBALNYMI I LOKALNYMI

Paweł Gładki
Instytut Matematyki, Uniwersytet Śląski
pawel.gladki@us.edu.pl

W niniejszym referacie opiszemy równoważność Witta ciał funkcji algebraicznych nad ciałami globalnymi. Część prezentowanych rezultatów przenosi się w naturalny sposób na ciała funkcji algebraicznych nad ciałami lokalnymi. Podane zostaną liczne przykłady i zastosowania, zaś prezentacja zagadnienia zostanie przeprowadzona z użyciem teorii hiperciał, czy też ogólniej algebr z wielowartościowym dodawaniem. Jest to wspólna praca z Murray'em Marshallem (University of Saskatchewan, Kanada).

GRUPY WOLNE AUTOMORFIZMÓW PRZELICZALNYCH STRUKTUR

Szymon Głąb
Instytut Matematyki, Politechnika Łódzka
szymon.glab@p.lodz.pl

Rozważamy następujące pojęcie wielkości dla podgrup S_∞. Powiemy, że G jest duża jeśli zawiera wolną podgrupę $\mathfrak{c}$ generatorów. Podamy warunek konieczny na to by struktura A miała dużą grupę automorfizmów $Aut(A)$. Dalej pokażemy, że każda wolna przeliczalna podgrupa S_∞ może być rozszerzona do wolnej grupy $\mathfrak{c}$ generatorów. W końcu pokażemy, że jeśli G_n są przeliczalnymi grupami, to albo grupa $\prod_{n\in\mathbb{N}} G_n$ jest duża, albo $\prod_{n\in\mathbb{N}} G_n$ nie zawiera wolnej podgrupy ω_1 generatorów.

[1] S. Glab, F. Strobin, *Large free subgroups of automorphisms groups of ultrahomogeneous spaces*, praca przyjęta w Colloq. Math., http://im0.p.lodz.pl/∼sglab/szymon/Free.pdf

ALGEBRAICZNE ALGEBRY NIEZMIENNIKÓW

Piotr Grzeszczuk
Wydział Informatyki, Politechnika Białostocka
piotrgr@pb.edu.pl

Element a algebry A nad ciałem k nazywa się **algebraicznym**, jeśli $f(a) = 0$ dla pewnego niezerowego wielomianu $f(x) \in k[x]$. Minimalny stopień wielomianu $f(x)$ nazywa się **stopniem** elementu a i oznacza $\deg_k(a)$. Algebrę A nazywa się **algebraiczną** jeśli $\deg_k(a) < \infty$ dla każdego $a \in A$. Jeśli $\deg_k(A) = \sup_{a\in A} \deg_k(a) < \infty$, to mówimy, że A jest algebraiczną algebrą **ograniczonego stopnia**.

Jeśli σ jest k-liniowym automorfizmem algebry A, to k-liniowe odwzorowanie $\delta\colon A \to A$ takie, że $\delta(ab) = \delta(a)b+\sigma(a)\delta(b)$ dla dowolnych $a, b \in A$ nazywa się **σ-różniczkowaniem** algebry A. Jeśli istnieje parametr $q \in k^\times$ taki, że $\delta\sigma = q\sigma\delta$, to δ nazywa się q-skośnym σ-różniczkowaniem. Podalgebrę $A^\delta = \ker \delta$ nazywa się algebrą **niezmienników** (lub stałych) σ-różniczkowania δ.

Głównym celem będzie przedstawienie związków między algebraicznością algebr A i A^δ przy pewnych naturalnych ograniczeniach na σ, δ oraz A. Głównym wynikiem jest następujące twierdzenie:

Twierdzenie. *Niech A będzie półpierwszą k–algebrą z q–skośnym σ–różniczkowaniem δ, gdzie δ i σ są algebraiczne nad k. Niech podalgebrą A^δ będzie algebraiczna ograniczonego stopnia i $\deg_k(A^\delta) < card(k^\times)$. Wtedy*

1. A jest algebrą algebraiczną ograniczonego stopnia oraz skończoną sumą prostą algebr centralnych prostych.

2. jeśli dodatkowo ciało k jest doskonałe, to A jest skończenie wymiarowa nad k.

Przedstawione będą zastosowania rezultatów o niezmiennikach skośnych różniczkowań do algebr Banacha. Wyniki pochodzą z pracy [1] i współautorskiej pracy z Jeffrey'em Bergenem [2]

Literatura

[1] P. Grzeszczuk, *On the Jacobson radical of constants of derivations*, J. Algebra **401** (2014), 62-75.

[2] J. Bergen and P. Grzeszczuk, *Skew derivations with algebraic invariants of bounded degree*, (2015) Preprint

ANIHILATORY W PIERŚCIENIACH

Małgorzata Jastrzębska
Instytut Matematyki i Fizyki, Uniwersytet Przyrodniczo-Humanistyczny w Siedlcach
majastrz2@wp.pl

Niech R będzie pierścieniem łącznym, niekoniecznie przemiennym, z $1 \neq 0$. Zbiór $\mathfrak{I}_l(R)$ wszystkich lewostronnych ideałów w R, uporządkowany przez relację inkluzji ma strukturę kraty. Mianowicie, dla dowolnych lewostronnych ideałów I_1, I_2 w R ich część wspólna $I_1 \cap I_2$ jest największym lewostronnym ideałem zawartym równocześnie w I_1 i I_2. Z kolei najmniejszy lewostronny ideał zawierający oba ideały I_1 i I_2 to ich suma algebraiczna I_1+I_2. Podobnie, zbiór $\mathfrak{I}_r(R)$ wszystkich prawostronnych ideałów w R z relacją zawierania jest kratą. Wiadomo, że karty $\mathfrak{I}_l(R)$ i $\mathfrak{I}_r(R)$ są modularne i zupełne, ale mogą się od siebie znacznie różnić.

W teorii pierścieni szczególne miejsce mają lewostronne (prawostronne) ideały, które są lewostronnymi (prawostronnymi) anihilatorami. Niech $\emptyset \neq S \subseteq R$, wówczas zbiór

$$\mathrm{l}_R S = \mathrm{l} S = \{r \in R : rS = 0\}$$

nazywamy lewostronnym anihilatorem zbioru S. Analogicznie, prawostronny anihilator S w R, to zbiór

$$\mathrm{r}_R S = \mathrm{r} S = \{r \in R : Sr = 0\}.$$

Oczywiście, każdy lewostronny anihilator w R jest lewostronnym ideałem w R i podobnie, każdy prawostronny anihilator w R jest prawostronnym ideałem w R. Co więcej, zbiór $\mathfrak{A}_l(R)$ wszystkich lewostronnych anihilatorów w R, z relacją zawierania ma strukturę kraty. Analogicznie, zbiór $\mathfrak{A}_r(R)$ wszystkich prawostronnych anihilatorów w R, z relacją zawierania ma strukturę kraty. Jednakże krata $\mathfrak{A}_l(R)$ nie musi być podkratą kraty $\mathfrak{I}_l(R)$ i krata $\mathfrak{A}_r(R)$ nie musi być podkratą kraty $\mathfrak{I}_r(R)$.

Celem tego referatu będzie przedstawienie pewnych własności krat anihilatorów, a także wskazanie niektórych różnic i podobieństw pomiędzy kratami anihilatorów i kratami ideałów w pierścieniach. Czasami ograniczać się będziemy do wybranych klas pierścieni.

[1] R.L. Blair, *Ideal lattices and the structure of rings*, Trans. Amer. Math. Soc. **75** (1953), 136–153.

[2] M. Jastrzębska, J. Krempa, *On lattices of annihilators*, Contemporary Mathematics **634** (2015), 189–196.

[3] T.Y. Lam, *Lectures on modules and rings*, Graduate Texts in Mathematics No. 189, New York: Springer-Verlag, Berlin, 1999.

[4] D. Niewieczerzał, *Some examples of rings with annihilator conditions*, Bull. Acad. Polon. Sci. Math. **26(1)** (1978), 1–5.

[5] R.R. Zapatrin, *Representation of finite lattices by annihilators of completely 0-simple semigroups*, Semigroup Forum **59** (1999), 121–125.

OD PIERŚCIENI STAŁYCH PRZEZ LEMAT FREUDENBURGA DO WARUNKÓW JAKOBIANOWYCH

Piotr Jędrzejewicz
Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu
pjedrzej@mat.umk.pl

Celem referatu jest przedstawienie osobistej perspektywy zainteresowań w tematyce algebry różniczkowej. Pierwotnej motywacji dostarczyły wyniki Nowickiego i Nagaty ([7]) dotyczące generatorów pierścieni stałych różniczkowań wielomianowych nad ciałem charakterystyki dodatniej. Odpowiedź na pytanie o charakteryzację pojedynczych generatorów takich pierścieni została udzielona w pracy [4], a uogólnienie na p-bazy o dowolnej liczbie elementów – w pracy [6]. Przy okazji tych badań ujawniły się dwa ciekawe aspekty.

Pierwszym aspektem jest istotna rola uogólnień lematu Freudenburga o nierozkładalnych dzielnikach pochodnych cząstkowych wielomianu dwóch zmiennych nad ciałem liczb zespolonych ([3]). Lemat ten został uogólniony przez van den Essena, Nowickiego i Tyca na przypadek ideałów pierwszych pierścienia wielomianów n zmiennych nad ciałem algebraicznie domkniętym charakterystyki zero ([2]). Odpowiednik lematu Freudenburga w charakterystyce dodatniej został uzyskany w pracy [4], a uogólnienia na dowolną liczbę wielomianów – w pracach [5] i [6].

Drugim aspektem jest pojawienie się warunków jakobianowych w twierdzeniach charakteryzujących. Dla wielomianu $f \in k[x_1, \ldots, x_n]$, gdzie k jest ciałem, warunek ten jest postaci $\mathrm{NWD}(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}) \in k \setminus \{0\}$, dla większej liczby wielomianów warunek dotyczy NWD jakobianów. Głównym wynikiem pracy [5] jest nowe równoważne sformułowanie hipotezy jakobianowej w terminach wielomianów nierozkładalnych i bezkwadratowych. Otwiera to drogę do badania naturalnych odpowiedników warunków jakobianowych w ogólniejszym kontekście, np. dla podpierścieni dziedzin z jednoznacznością rozkładu ([1]).

[1] H. Brenner, P. Jędrzejewicz, J. Zieliński, *Analogs of Jacobian conditions for subrings*, w przygotowaniu.

[2] A. van den Essen, A. Nowicki, A. Tyc, *Generalizations of a lemma of Freudenburg*, J. Pure Appl. Algebra **177** (2003), 43–47.

[3] G. Freudenburg, *A note on the kernel of a locally nilpotent derivation*, Proc. Amer. Math. Soc. **124** (1996), 27–29.

[4] P. Jędrzejewicz, *A characterization of one-element p-bases of rings of constants*, Bull. Pol. Acad. Sci. Math. **59** (2011), 19–26.

[5] P. Jędrzejewicz, *A characterization of Keller maps*, J. Pure Appl. Algebra **217** (2013), 165–171.

[6] P. Jędrzejewicz, *A characterization of p-bases of rings of constants*, Cent. Eur. J. Math. **11** (2013), 900–909.

[7] A. Nowicki and M. Nagata, *Rings of constants for k-derivations in* $k[x_1, \ldots, x_n]$, J. Math. Kyoto Univ. **28** (1988), 111–118.

PODPRZESTRZENIE NIEZMIENNICZE NILPOTENTNYCH OPERATORÓW LINIOWYCH

Justyna Kosakowska
Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu
justus@mat.umk.pl

Niech k będzie dowolnym ciałem. Nilpotentnym operatorem liniowym nazywamy dowolny $k[T]$-moduł $N_\alpha = N_\alpha(k) = \bigoplus_{i=1}^{s} k[T]/(T^{\alpha_i})$, gdzie $\alpha = (\alpha_1 \geq \cdots \geq \alpha_s)$ jest partycją. Dla ustalonej trójki partycji (α, β, γ) rozważamy kategorię $\mathcal{S}_{\alpha,\gamma}^{\beta}$, której obiektami są systemy (N_α, N_β, f), gdzie $f\colon N_\alpha \to N_\beta$ jest zanurzeniem spełniającym $\operatorname{Coker} f \simeq N_\gamma$. Interesują nas algebraiczne i geometryczne własności takich kategorii oraz możliwości badania ich za pomocą narzędzi kombinatorycznych. Celem referatu jest zaprezentowanie wyników zawartych w pracach [1, 2, 3, 4]. Pokazują one związki obiektów kombinatorycznych (m.in. tablic Littlewooda–Richardsona, tablic Klein, diagramów łukowych) z własnościami algebraicznymi i geometrycznymi kategorii $\mathcal{S}_{\alpha,\gamma}^{\beta}$.

[1] J. Kosakowska and M. Schmidmeier, *Operations on arc diagrams and degenerations for invariant subspaces of linear operators,* Trans. Amer. Math. Soc., in press, http://dx.doi.org/10.1090/S0002-9947-2014-06206-5.

[2] J. Kosakowska and M. Schmidmeier, *Arc diagram varieties,* Contemporary Mathematics Series of the AMS **607**, 2014, 205-224.

[3] J. Kosakowska and M. Schmidmeier, *The boundary of the irreducible components for invariant subspace varieties,* preprint 2014, arXiv:1211.5798 [math.RT].

[4] J. Kosakowska, M. Schmidmeier and H. Thomas, *Two Partial Orders for Littlewood–Richardson Tableaux*, preprint 2015.

POLSKIE AKCENTY W TEORII PIERŚCIENI GAUSSOWSKICH, ARMENDARIZA I MCCOYA

Kamil Kozłowski, Ryszard Mazurek
Wydział Informatyki, Politechnika Białostocka
kam.kozlowski93@gmail.com, r.mazurek@pb.edu.pl

Pierścienie gaussowskie, Armendariza i McCoya są ze sobą powiązane i są intensywnie badane. Celem referatu jest przedstawienie wkładu polskich algebraików do teorii tych trzech klas pierścieni. Rozważane pierścienie są łączne i mają jedynkę, ale nie muszą być przemienne.

Mówimy, że pierścień R jest *prawostronnie gaussowski*, jeżeli dla dowolnych wielomianów $f, g \in R[x]$ zachodzi równość

$$(*) \quad c_r(fg) = c_r(f)c_r(g),$$

gdzie $c_r(h)$ oznacza prawostronny ideał pierścienia R generowany przez współczynniki wielomianu $h \in R[x]$. Nazwa tych pierścieni pochodzi od lematu Gaussa, mówiącego że równość $(*)$ zachodzi, jeśli R jest przemienną dziedziną z jednoznacznością rozkładu. Wiadomo, że przemienne dziedziny gaussowskie to dokładnie dziedziny Prüfera. Ze względu na znaczenie dziedzin Prüfera w teorii pierścieni, naturalnym jest badanie wpływu warunku $(*)$ na strukturę pierścieni, które niekoniecznie są dziedzinami, również w przypadku nieprzemiennym.

Pierścień R nazywamy *pierścieniem Armendariza*, jeżeli dla dowolnych wielomianów $f = \sum_i a_i x^i, g = \sum_j b_j x^j \in R[x]$ z równości $fg = 0$ wynika, że $a_i b_j = 0$ dla wszystkich indeksów i, j. Nazwa tych pierścieni pochodzi od nazwiska Efraima Pacillasa Armendariza, który w 1974 r. udowodnił, że warunek podany w definicji jest spełniony, gdy R jest pierścieniem zredukowanym (tzn. R nie zawiera niezerowych elementów nilpotentnych). Pierścienie prawostronnie gaussowskie są silnie związane z pierścieniami Armendariza poprzez fakt, że pierścień R jest prawostronnie gaussowski wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie jego ideały prawostronne są ideałami dwustronnymi i każdy jego obraz homorficzny jest pierścieniem Armendariza; w szczególności każdy pierścień prawostronnie gaussowski jest pierścieniem Armendariza. Pierścienie Armendariza mają następującą użyteczną charakteryzację: są to pierścienie R, dla których przyporządkowanie $I \mapsto I[x]$ jest izomorfizmem krat prawostronnych ideałów anihilatorowych pierścieni R i $R[x]$. Spośród trzech klas pierścieni omawianych w referacie ta klasa jest badana najintensywniej (w bazie MathSciNet znajduje się 66 prac zawierających w tytule słowa „Armendariz rings").

Mówimy, że pierścień R jest *prawostronnie McCoya*, jeżeli dla dowolnych niezerowych wielomianów $f, g \in R[x]$ z równości $fg = 0$ wynika, że $fa = 0$ dla pewnego niezerowego elementu $a \in R$. Nazwa tych pierścieni pochodzi od nazwiska Neala Henry'ego McCoya, który w 1942 r. zauważył, że podaną własność mają wszystkie pierścienie przemienne. Oczywiście, każdy pierścień Armendariza jest prawostronnie McCoya.

Każda z trzech tytułowych klas pierścieni została zdefiniowana za pomocą warunku odnoszącego się do pierścienia wielomianów $R[x]$. Zastępując w tych definicjach pierścień wielomianów $R[x]$ innymi rozszerzeniami pierścienia R (np. pierścieniem półgrupowym $R[S]$, pierścieniem szeregów potęgowych $R[[x]]$ lub pierścieniem skośnych wielomianów

$R[x, \sigma]$) wyróżniono kolejne klasy pierścieni. Również tak otrzymane warianty pierścieni gaussowskich, Armendariza i McCoya są intensywnie badane.

W referacie zostaną przedstawione najważniejsze własności pierścieni gaussowskich, Armendariza, McCoya i ich wariantów, ze szczególnym uwzględnieniem rezultatów prac, których autorami lub współautorami są polscy algebraicy ([1]–[12]). Przedstawione będą motywacje, szerszy kontekst i znaczenie tych rezultatów.

[1] C. Huh, Y. Lee, A. Smoktunowicz, *Armendariz rings and semicommutative rings*, Comm. Algebra **30** (2002), 751-761.

[2] K. Kozłowski, R. Mazurek, *On semi-Armendariz matrix rings*, J. Korean Math. Soc., praca przyjęta do druku.

[3] A. Leroy, J. Matczuk, *On right strongly McCoy rings*. Ring theory and its applications, 233-244, Contemp. Math., **609**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2014.

[4] G. Marks, R. Mazurek, *Annelidan rings*, praca złożona.

[5] G. Marks, R. Mazurek, *Rings with linearly ordered right annihilators*, praca złożona.

[6] G. Marks, R. Mazurek, M. Ziembowski, *A new class of unique product monoids with applications to ring theory*, Semigroup Forum **78** (2009), 210-225.

[7] G. Marks, R. Mazurek, M. Ziembowski, *A unified approach to various generalizations of Armendariz rings*, Bull. Aust. Math. Soc. **81** (2010), 361-397.

[8] R. Mazurek, M. Ziembowski, *On a characterization of distributive rings via saturations and its applications to Armendariz and Gaussian rings*, Rev. Mat. Iberoam. **30** (2014), 1073-1088.

[9] R. Mazurek, M. Ziembowski, *On right McCoy rings and right McCoy rings relative to u.p.-monoids*, Commun. Contemp. Math., praca przyjęta do druku.

[10] R. Mazurek, M. Ziembowski, *Right Gaussian rings and skew power series rings*, J. Algebra **330** (2011), 130-146.

[11] W. Wang, E. R. Puczyłowski, L. Li, *On Armendariz rings and matrix rings with simple 0-multiplication*, Comm. Algebra **36** (2008), 1514-1519.

[12] Y. Zhou, M. Ziembowski, *Distributive modules and Armendariz modules*, J. Math. Soc. Japan, **67** (2015), 789-796.

LICZBY MILNORA W DEFORMACJACH OSOBLIWOŚCI

Tadeusz Krasiński
Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Łódzki
krasinsk@uni.lodz.pl

Niech f_0 będzie osobliwością izolowaną ośrodku w punkcie $0 \in \mathbb{C}^n$, tzn. f_0 jest funkcją holomorficzną w otoczeniu $0 \in \mathbb{C}^n$ taką, że

1. $f_0(0) = 0$,
2. $\nabla f_0(0) := (\frac{\partial f_0}{\partial z_1}(0), \ldots, \frac{\partial f_0}{\partial z_n}(0)) = 0$,
3. $\nabla f_0(z) \neq 0$ dla $z \neq 0$ dostatecznie małych.

Podstawowym niezmiennikiem topologicznym osobliwości f_0 jest liczba Milnora $\mu(f_0) \in \mathbb{N}$, zdefiniowana w języku algebry jako $\mu(f_0) := \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_n/(\frac{\partial f_0}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial f_0}{\partial z_n})$ – wymiar pierścienia ilorazowego (traktowanego jako przestrzeń wektorowa nad $\mathbb{C}$) pierścienia kiełków funkcji holomorficznych $\mathcal{O}_n$ przez ideał gradientowy $(\frac{\partial f_0}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial f_0}{\partial z_n})\mathcal{O}_n$. W referacie omówię zmianę liczb Milnora w holomorficznych rodzinach osobliwości.

O NIEZMIENNIKACH LICZBOWYCH GRUP SKOŃCZONYCH

Jan Krempa
Instytut Matematyki, Uniwersytet Warszawski
jkrempa@mimuw.pl

Zamierzam mówić o liczbowych niezmiennikach grup skończonych. Pewne z nich są związane z rzędem, pewne z liczbą generatorów, a jeszcze inne z kratami podgrup.

Postaram się, aby prezentacja miała charakter elementarny. U słuchaczy będę zakładał tylko podstawową wiedzę o grupach, wyłożoną z nadmiarem w cytowanych podręcznikach. Pozostałe cytowania związane są z niezmiennikami, które zamierzam zaprezentować.

[1] P. Apisa, B. Klopsch, *A generalization of the Burnside Basis Theorem,* J. Algebra **400** (2014), 8–16.

[2] O. Artemowicz, A. Piękosz, *Algebra*, PK, Kraków 2010.

[3] C. Bagiński, *Wstęp do Teorii Grup*, Script, Warszawa 2002.

[4] C. Bagiński, A. Sakowicz, *Finite groups with globally permutable lattices of subgroups*, Colloq. Math. **82**(1999),65–77.

[5] J. Krempa, A. Stocka, *On some invariants of finite groups*, Int. J. Group Theory **2(1)** (2013), 109–115.

[6] J. Krempa, A. Stocka, *On some sets of generators of finite groups*, J. Algebra **405** (2014), 122–134.

[7] J. Krempa, A. Stocka, *On finite groups with pp-basis property*, Bull. Aust. Math. Soc. **91(2)** (2015), 241–249.

[8] J. Krempa, B. Terlikowska-Osłowska, *On uniform dimension of lattices*, Contributions to General Algebra, **9** (1995), 219–230.

[9] I. A. Malinowska, *On finite nearly uniform groups*, Publ. Math. Debrecen **69** (2006), 155–169.

[10] J. McDougall–Bagnall, M. Quick, *Groups with the basis property*, J. Algebra **346** (2011), 332–339.

[11] H. Whitney, *On the abstract properties of linear dependence*, Trans. Amer. Math. Soc. **34** (1932), 339–362.

KONTRPRZYKŁAD NA ZAWIERANIE $I^{(3)} \subseteq I^2$ NAD LICZBAMI RZECZYWISTYMI

Magdalena Lampa–Baczyńska, Grzegorz Malara
Instytut Matematyki, Uniwersytet Pedagogiczny w Krakowie
lampa.baczynska@wp.pl, grzegorzmalara@gmail.pl

W ostatnich latach niesłabnącą popularnością cieszy się zagadnienie relacji pomiędzy potęgami symbolicznymi i zwykłymi ideałów. Przez długi czas jednym z nierozstrzygniętych problemów dotyczących zawierania w $\mathbb{P}^n$ była odpowiedź na pytanie, które postawił Harbourne i Huneke ([3], Conjecture 4.1.1.) mianowicie czy

$$I^{(m)} \subseteq I^r \quad \text{dla} \quad m \geq nr - (n-1)?$$

Zawieranie to jest prawdziwe w wielu przypadkach i przez długi czas panowało przekonanie o jego prawdziwości, jednakże dla najprostszego możliwego przypadku

$$I^{(3)} \subseteq I^2 \tag{1}$$

w 2013 roku Dumnicki, Szemberg i Tutaj-Gasińska podają w [2] kontrprzykład nad liczbami zespolonymi, który nie da się zrealizować nad liczbami rzeczywistymi.

Celem niniejszego przemówienia jest zaprezentowanie kontrprzykładu dla (1) nad $\mathbb{R}$ opisane w pracy zbiorowej [1].

[1] A. Czapliński, A. Główka, M. Lampa-Baczyńska, P. Łuszcz-Świdecka, G. Malara, P. Pokora, J. Szpond: A counterexample to the containment $I^{(3)} \subseteq I^2$ over the reals., *arXiv:1310.0904v1*,

[2] M. Dumnicki, T. Szemberg, H. Tutaj-Gasinska, A counter-example to a question by Huneke and Harbourne, *J. Algebra* **393**: 24–29 (2013), Serie Name, **2**, Publisher, Place of publishing, 2014.

[3] B. Harbourne, C. Huneke, Are symbolic powers highly evolved?, *J. Ramanujan Math. Soc.* **28**: 311–330 (2013).

PROBLEMY TEORII GRUP NIESKOŃCZONYCH

Olga Macedońska
Instytut Matematyki, Politechnika Śląska
Olga.Macedonska@polsl.pl

Prezentacja dotyczy różnych klas grup nieskończonych i kilku otwartych problemów z nimi związanych. Groupland jest płaską planetą gdzie żyją wszystkie grupy należące do różnych klas. Na przykład klas grup rezidualnie skończonych, grup lokalnie gradowanych, grup o różnych typach wzrostu, grup spełniających różne typy tożsamości, etc. Mapa Groupland pokazuje wzajemne relacje tych klas i pomaga zrozumieniu problemów.

[1] A. Yu. Ol'shanskii and A. Storozhev, *A group variety defined by a semigroup law*, J. Austral. Math. Soc. (Series A), **60**, (1996) 255–259.

[2] O. Macedońska, *Groupland*, London Math. Soc. Lecture Notes Series, **30**, (2003) 400–404.

[3] B. Bajorska, O. Macedońska, *On locally graded n-Engel and positively n-Engel groups*, Publicationes Mathematicae Debrecen, **74**, (2009) 249–256.

[4] O. Macedońska, W. Tomaszewski, *Group laws $[x, y^{-1}] = u(x, y)$ and varietal properties*, Communications in Algebra, **40**, (2012) 4661–4667.

MACIERZE NIESKOŃCZONE SUSZKIEWICZA I VERMESA ORAZ ICH WŁASNOŚCI

Martyna Maciaszczyk
Instytut Matematyki, Politechnika Śląska
martyna.maciaszczyk@polsl.pl

W pierwszej części prezentacji skonstruujemy klasę macierzy nieskończonych górnotrójkątnych nie mających prawych dzielników zera. Konstrukcja ta uogólnia przykład podany przez Suszkiewicza.

W drugiej części zaprezentujemy przykłady macierzy nieskończonych mających skończoną liczbę niezerowych elementów w każdym wierszu i w każdej kolumnie i takich, że macierze odwrotne do nich mają nieskończenie wiele elementów niezerowych w każdym wierszu i w każdej kolumnie. Przykłady te pochodzą z prac Vermesa.

[1] A.K Suszkiewicz, *On an infinite algebra of triangular matrices.(Russian)*, Har'kov. Gos. Univ. Uć. Zap. 34 = Zap. Mat. Otd. Fiz.-Mat. Fak. i Har'kov. Mat. Obść.(4) **22** (1950), 77–93.

[2] P. Vermes, *Non-associative rings of infinite matrices.*, Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A. 55, Indagationes Math., **14**, (1952). 245–252.

KRATA QUASIROZMAITOŚCI MODUŁÓW NAD DZIEDZINĄ DEDEKINDA

Katarzyna Matczak, Anna Mućka
Wydział Budownictwa, Mechaniki i Petrochemii w Płocku, Politechnika Warszawska
Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych, Politechnika Warszawska
matczak.katarzyna@gmail.com, a.mucka@mini.pw.edu.pl

W 1965 roku A.A. Vinogradov opisał kratą podquasirozmaitości grup abelowych (równoważnie modułów nad pierścieniem liczb całkowitych). D.V. Biełkin w roku 1995 uogólnił wynik Vinogradowa podając konstrukcję kraty, która jest izomorficzna z kratą podquasirozmaitości modułów nad dowolnym pierścieniem ideałów głównych. Każda taka quasirozmaitość jest opisana za pomocą a funkcji, która informuje jakie moduły torsyjne do niej należą. W rozmaitości modułów nad pierścieniem ideałów głównych R każdy beztorsyjny moduł jest izomorficzny z wolnym R-modułem R. W rozmaitości modułów nad dziedziną Dedekinda mamy nieskończenie wiele beztorsyjnych, nieizomorficznych modułów. Konstrukcja kraty Biełkina wykorzystuje moc zbioru elementów pierwszych pierścienia. W dowodach korzysta się z jednoznaczności rozkładu elementu na iloczyn elementów pierwszych. Jak wiadomo w dziedzinach Dedekinda nie mamy takiej jednoznaczności. W naszym referacie pokażemy, że krata podquasirozmaitości modułów nad dziedziną Dedekinda zależy od mocy zbioru ideałów pierwszych pierścienia. Do opisu kraty podquasirozmaitości modułów nad dziedziną Dedekinda wykorzystamy konstrukcję kraty Biełkina.

[1] D. V. Belkin, *Constructing Lattices of Quasivarieties of Modules,* (in Russian), Ph.D. Thesis, Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia, 1995.

[2] K. Matczak and A. Romanowska, *Quasivarieties of cancellative commutative binary modes,* Studia Logica **78** (2004), 321–335.

[3] K. Matczak and A. Romanowska, *Irregular quasivarieties of commutative binary modes,* International Journal of Algebra and Computation **15** (2005), 699–715.

[4] A.B. Romanowska and J.D.H. Smith, *Modes,* World Scientific, Singapore, 2002.

[5] W. Stephenson *Modules Whose Lattice of Submodules is Distributive,* Proc. London Math. Soc. **s3-28**, 2 (1974), 291–310

[6] A.A. Vinogradov, *Quasivarieties of abelian groups,* (in Russian), Algebra i Logika **4**(1965), 15–19.

[7] O. Zariski, P. Samuel, *Commutative algebra*, vol. I, Springer-Verlag, Berlin 1975.

CZY PÓŁGRUPA MOŻE BYĆ NIEZMIENNIKIEM?

Arkadiusz Męcel
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski
a.mecel@mimuw.edu.pl

Czy półgrupy mogą być niezmiennikami ważnych obiektów algebraicznych? Jakie własności można odczytać z ich struktury? Badanie półgrup wymaga metod zupełnie innych i często bardziej różnorodnych niż w przypadku teorii grup. Liczba parami nieizomorficznych półgrup skończonych rośnie bardzo szybko wraz ze wzrostem liczby elementów tak, że do dziś nie wiadomo ile jest istotnie różnych półgrup dziesięcioelementowych. Niemniej jednak przykłady „półgrup niezmienników” istnieją, choć nie są wciąż liczne. Uzyskano natomiast ważne i trudne wyniki sugerujące istnienie takich obiektów.

W mojej rozprawie doktorskiej [1] rozważałem prosty przykład konstrukcji prowadzącej do uzyskania tego rodzaju niezmiennika półgrupowego. Przypisuje ona w naturalny sposób każdej unitarnej algebrze łącznej A nad ciałem $\mathbb{K}$ półgrupę $C(A)$ złożoną z klas sprzężoności ideałów lewostronnych w A. Obiekt ten badano po raz pierwszy w [3].

W kontekście algebr A skończenie wymiarowych nad ciałem algebraicznie domkniętym skończoność $C(A)$ okazuje się mieć bliskie związki z pojęciem skończonego typu reprezentacyjnego i z klasycznymi zagadnieniami teorii reprezentacji, między innymi z klasyfikacją kołczanów skończonego typu. Struktura $C(A)$, o ile jest to półgrupa skończona, zawiera szereg informacji o algebrze, między innymi informację o strukturze algebry A modulo radykał Jacobsona, z dokładnością do izomorfizmu.

Jeden z głównych rezultatów rozprawy mówi, że jeśli algebry A i B spełniają powyższe założenia i kwadraty ich radykałów Jacobsona są zerowe, wówczas o ile półgrupy $C(A)$ i $C(B)$ są skończone i izomorficzne, to także same algebry A i B muszą być izomorficzne.

Rezultaty, o których opowiem pochodzą ze wspólnej pracy z prof. J. Oknińskim – promotorem mojej rozprawy.

[1] A. Męcel, *Półgrupa sprzężoności ideałów lewostronnych algebry łącznej,* Rozprawa doktorska, Uniwersytet Warszawski, 2014.

[2] A. Męcel, J. Okniński, *Conjugacy classes of left ideals of a finite dimensional algebra*, Publ. Mat. **57** (2013), 477–496.

[3] J. Okniński, L. Renner, *Algebras with finitely many orbits*, J. Algebra **264** (2003), 479–495.

TWIERDZENIE O DOMKNIĘTOŚCI I NIERÓWNOŚĆ ŁOJASIEWICZA NAD HENSELOWSKIMI CIAŁAMI Z NORMĄ NIEARCHIMEDESOWĄ

KRZYSZTOF JAN NOWAK
Instytut Matematyki, Uniwersytet Jagielloński
nowak@im.uj.edu.pl

Niech K będzie henselowskim ciałem z normą niearchimedesową charakterystyki zero. Przykładami takich ciał są ciała ułamków pierścieni szeregów formalnych lub szeregów Puiseux ze współczynnikami z ciała $\Bbbk$ charakterystyki zero i ciało uogólnionych szeregów formalnych

$$\Bbbk((t^\Gamma)) := \left\{ f(t) = \sum_{\gamma \in \Gamma} a_\gamma t^\gamma : \ a_\gamma \in \Bbbk, \ \operatorname{supp} f(t) \text{ jest dobrze uporządkowany} \right\}.$$

Każde takie ciało ma topologię metryczną wyznaczoną przez jego normę. Zbiór K–punktów $X(K)$ dowolnej K–rozmaitości algebraicznej X dziedziczy z K topologię, zwaną K–topologią. Ciało K rozważam w 3–sortowym języku Denefa–Pasa wraz z dwoma sortami pomocniczymi: grupą wartości Γ waluacji v i ciałem rezydualnym $\Bbbk$.

Przedstawię twierdzenie o domkniętości z mojej pracy [2] o tym, że projekcja kanoniczna

$$K^n \times K\mathbb{P}^m \to K^n$$

jest odwzorowaniem definiowalnie domkniętym w K–topologii, tzn. projekcja każdego definiowalnego podzbioru domkniętego w $K^n \times K\mathbb{P}^m$ jest podzbiorem domkniętym w K^n. Jego dowód opiera się na eliminacji kwantyfikatorów Pasa [3] i na pewnej osłabionej wersji wyboru łuku.

Twierdzenie to ma szereg konsekwencji: rozdmuchania K-punktów gładkich K-rozmaitości algebraicznych są odwzorowaniami definiowalnie domkniętymi; "descent property" dla takich rozdmuchań; ogólna wersja nierówności Łojasiewicza dla ciągłych funkcji definiowalnych na podzbiorach lokalnie domkniętych w K-topologii; wybór łuku dla zbiorów definiowalnych i twierdzenie o przedłużaniu ciągłych funkcji dziedzicznie wymiernych, uzyskane dla rozmaitości rzeczywistych i p-adycznych we wspólnej pracy [1] z J. Kollárem. "Descent property" umożliwia zastosowanie desingularyzacji i transformacji do przecięć normalnych przez rozdmuchanie w podobny sposób, jak nad ciałami lokalnie zwartymi. W referacie szczególną uwagę zwrócę na nierówność Łojasiewicza.

[1] J. Kollár, K. Nowak„ *Continuous rational functions on real and p-adic varieties*, Math. Zeitschrift **279** (2015), 85–97.

[2] K.J. Nowak, *Algebraic geometry over Henselian rank one valued fields*, arXiv:1410.3280 [math.AG] (2015).

[3] J. Pas, *Uniform p-adic cell decomposition and local zeta functions*, J. Reine Angew. Math. **399** (1989), 137–172.

ALGEBRY UPORZĄDKOWANE PÓŁKRATOWO

Agata Pilitowska
Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych, Politechnika Warszawska
apili@mini.pw.edu.pl

Struktury uporządkowane, w szczególności ciała uporządkowane, uporządkowane przestrzenie wektorowe, uporządkowane grupy i półgrupy, mają nie tylko interesujące własnościwości, ale także szerokie zastosowania w wielu działach matematyki. Na przykład, kratowo uporządkowane grupy odgrywają podstawową rolę w badaniu algebr logik, natomiast MV-algebry są algebraicznym odpowiednikiem nieskończenie wartościowej logiki Łukasiewicza.

Szczególną klasę algebr uporządkowanych stanowią algebry uporządkowane półkratowo. Algebrę $(A, F, +)$ nazywamy *półkratowo uporządkowaną*, jeśli (A, F) jest algebrą ustalonego typu, $(A, +)$ jest (górną) półkratą oraz wszystkie operacje ze zbioru F są rozdzielne względem operacji $+$, tzn. dla każdej $0 \neq n$-arnej operacji $f \in F$ zachodzi $f(x_1, \dots, x_i + y_i, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) + f(x_1, \dots, y_i, \dots, x_n)$.

Przykładami takich algebr są m.in. addytywnie idempotentne półpierścienie, kraty dystrybutywne czy też półkratowo uporządkowane półgrupy. Jeszcze innym przykładem jest algebra $(\mathbb{R}, \underline{I}^0, \max)$ określona na zbiorze liczb rzeczywistych z operacjami binarnymi $\underline{p}(x, y) := (1-p)x + py$, zdefiniowanymi dla każdego $p \in I^0 = (0, 1) \subset \mathbb{R}$.

Ważny przykład algebr uporządkowanych półkratowo pochodzi od algebr podzbiorów. Dla danej algebry (A, F), niech $\mathcal{P}_{>0}A := \{X \subseteq A \mid X \neq \varnothing\}$. *Rozszerzoną algebrą potęgową* (*kompleksową*) algebry (A, F) nazywamy algebrę $(\mathcal{P}_{>0}A, \widetilde{F}, \cup)$, gdzie dla dowolnej n–arnej operacji $f \in F$, przekształcenie $\widetilde{f} \colon \mathcal{P}_{>0}A^n \to \mathcal{P}_{>0}A$; $\widetilde{f}(A_1, \dots, A_n) := \{f(a_1, \dots, a_n) \mid a_i \in A_i\}$ jest tzw. *operację kompleksową* oraz $\cup$ oznacza sumę mnogościową zbiorów. Ściśle związane z algebrami potęgowymi są tzw. *algebry podalgebr*, gdzie zamiast (niepustych) podzbiorów rozważamy (niepuste) podalgebry.

Algebry potęgowe, (i bardziej ogólne systemy relacyjne), okazały się być przydatne do reprezentacji innych algebr. B. Jónsson i A. Tarski zastosowali taką konstrukcję do rozszerzenia twierdzenia o reprezentacji Stone'a dla algebr Boole'a. Podobna reprezentacja występuje także dla algebr domknięć oraz grupoidów, w tym dla półgrup przemiennych.

W naszym referacie pokażemy, jak stosując konstrukcję potęgową scharakteryzować wolne obiekty w pewnych rozmaitościach algebr półkratowo uporządkowanych. Następnie opiszemy kraty podrozmaitości dla wybranych rozmaitości algebr półkratowo uporządkowanych [2].

Opis kraty podrozmaitości rozmaitości *modałów*, czyli półkratowo uporządkowanych algebr idempotentnych (każdy podzbiór jednoelementowy jest podalgebrą) i entropicznych (dowolne dwie operacje są przemienne) pozostaje w ścisłym związku z otwartym problem dotyczącym znalezienia równości spełnionych w rozmaitościach algebr podalgebr. Przedstawimy częściowe rozwiązanie tego problemu w oparciu o rozszerzone algebry potęgowe [1].

[1] A. Pilitowska, A. Zamojska-Dzienio, *Varieties generated by modes of submodes*, Algebra Universalis **68**(3) (2012), 221–236.

[2] A. Pilitowska, A. Zamojska-Dzienio, *The lattice of subvarieties of semilattice ordered algebras*, Order **31**(2) (2014), 217–238.

O WYRÓŻNIKU

Arkadiusz Płoski
Katedra Matematyki, Politechnika Świętokrzyska
matap@tu.kielce.pl

Wyróżnik Δ_f wielomianu $f = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$ stopnia n jest naturalnym uogólnieniem wyróżnika $a_1^2 - 4a_0a_2$ trójmianu kwadratowego. Warunek $\Delta_f = 0$ charakteryzuje wielomiany posiadające pierwiastek wielokrotny.

W podręcznikach algebry klasycznej rozdziały o wyróżniku zajmują poczesne miejsce: jest on interesującym przykładem niezmiennika formy jednorodnej $f = a_0x^n + a_1x^{n-1}y + \cdots + a_0y^n$.

Wyróżnik i jego uogólnienia odgrywają ważną rolę w Algebrze, Arytmetyce i Geometrii. Celem tego odczytu jest przedstawienie zastosowań tytułowego pojęcia w teorii osobliwości krzywych algebraicznych. Podamy związek wyróżnika z liczbą Milnora przedstawimy wersję "wyróżnikową" słynnej hipotezy jakobianowej.

[1] J. Gwoździewicz, A. Płoski, *On the singularities at infinity of plane algebraic curves.*, Rocky Mountain J. Math 32(2002), no. 1, pp. 139.

[2] A. Płoski, *A note on discriminant.*, Communication Algebra, Volume 39, Issue 11(2011), 4283–4285.

SOLUTIONS OF A LINEAR MATRIX EQUATION $XA_0 = A_1$ WITH PRESCRIBED CHARACTERISTIC POLYNOMIALS

V.M. Prokip
IAPMM, L'viv, Ukraine
v.prokip@gmail.com

Let $\mathbb{F}$ be a field. Notations: $M_{n,n}(\mathbb{F})$ and $M_{n,n}(\mathbb{F}[\lambda])$ are the sets of $n \times n$ matrices over the field $\mathbb{F}$ and over the ring of polynomials $\mathbb{F}[\lambda]$ respectively; I_n is the identity $n \times n$ matrix. Further, let $d_A^{(k)}(\lambda)$ be the greatest common divisor (g.c.d.) of the minors k order of a matrix $A(\lambda) \in M_{n,n}(\mathbb{F}[\lambda])$, where $k = 1, 2, \ldots, n$.

Consider a matrix equation

$$XA_0 = A_1, \tag{1}$$

where $A_0, A_1 \in M_{n,n}(\mathbf{F})$ and X is unknown $n \times n$ matrix. It is well know that the matrix equation (1) over $\mathbb{F}$ is solvable if and only if

$$\operatorname{rank} A_0 = \operatorname{rank} \begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \end{bmatrix}.$$

The matrix equation (1) has a long history. Many authors investigated the problem when the equation (1) has a solution that belongs to a special class of matrices (e.g. symmetric, ortogonal, Hermitian, positive definite and other [1]). In view of the above, there are two questions: (I) to find necessary and sufficient conditions for the existence of such solutions, and (II) to describe the set of all such solutions.

In this report we analyze the following problem. Let us assume that the matrix equation (1) is solvable and $d(\lambda) = \lambda^n + d_1\lambda^{n-1} + \cdots + d_n \in \mathbb{F}[x]$ is a monic polynomial of degree n. When under the given conditions does there exist a solution $X_0 = D \in M_{n,n}(\mathbb{F})$ with the characteristic polynomial $d(\lambda) = \det(I_n\lambda - D)$ for the equation (1)?

Theorem. *Let for the matrix equation $XA_0 = A_1$, where $A_0, A_1 \in M_{n,n}(\mathbb{F})$,*

$$\operatorname{rank} A_0 = \operatorname{rank} \begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \end{bmatrix} = n - 1.$$

If $d_A^{(n-1)}(\lambda) = 1$, where $A(\lambda) = A_0\lambda - A_1$, then for every monic polynomial

$$d(\lambda) = \lambda^n + d_1\lambda^{n-1} + \cdots + d_n \in \mathbb{F}[x], \quad \deg d(\lambda) = n,$$

for the matrix equation $XA_0 = A_1$ there exists a solution $X_0 = D \in M_{n,n}(\mathbb{F})$ with the characteristic polynomial $d(\lambda)$. The matrix D is uniquely defined by $d(\lambda)$.

We present also computational procedures to find those solutions.

[1] Alegra Dajić, J.J. Kolicha, *Equations $ax = c$ and $cx = d$ in rings and rings with involution with applications to Hilbert space operators*, Linear Algebra Appl. **429** (2008), 1779—1809.

RÓŻNICZKOWO-ALGEBRAICZNA ANALIZA CAŁKOWALNOŚCI HIERARCHII TYPU RIEMANNA

Anatolij K. Prykarpatski
Wydział Matematyki Stosowanej, Akademia Górniczo–Hutnicza, Kraków
pryk.anat@cybergal.com

Będzie rozwijane różniczkowo-algebraiczne podejście do badania całkowalności typu Laxa uogólnionej hydrodynamicznej hierarchii typu Riemanna, odpowiednia nowa reprezentacja typu Laxa będzie skonstruowana w postaci jawnej. Będą też omówione skojarzona całkowalność bi-Hamiltonowa oraz kompatybilne struktury Poissona dla uogólnionej hierarchii typu Riemanna za pomocą gradientowo-holonomicznej i geometrycznej metod.

[1] Kaplanski I. Introduction to differential algebra. NY, 1957

[2] Ritt J.F. Differential algebra. AMS-Colloquium Publications, vol. XXXIII, New York, NY, Dover Publ., 1966

[3] Kolchin E. R. Differential Algebra and Algebraic Groups. Academic Press, 1973.

[4] Weil J.-A. Introduction to Diffeerential Algebra and Differential Galois Theory. CIMPA-UNESCO- Vietnam Lectures: Hanoi, 2001

[5] Crespo T. and Hajto Z. Algebraic Groups and Differential Galois Theory. Graduate Studies in Mathematics Series, American Mathematical Society Publisher, v.122, 2011

[6] Prykarpatsky A.K., Artemovych O.D., Popowicz Z. and Pavlov M.V. Differential-algebraic integrability analysis of the generalized Riemann type and Korteweg–de Vries hydrodynamical equations. J. Phys. A: Math. Theor. 43 (2010) 295205 (13pp)

[7] Popowicz Z. and Prykarpatski A. K. The non-polynomial conservation laws and integrability analysis of generalized Riemann type hydrodynamical equations. Nonlinearity, 23 (2010), p. 2517-2537

[8] Popowicz Z. The matrix Lax representation of the generalized Riemann equations and its conservation laws. Physics Letters A 375 (2011) p. 3268–3272; arXiv:1106.1274v2 [nlin.SI] 4 Jul 2011

[9] Blackmore D., Prykarpatsky A.K. and Samoylenko V.Hr. Nonlinear dynamical systems of mathematical physics: spectral and differential-geometrical integrability analysis. World Scienti.c Publ., NJ, USA, 2011

ALGEBRY HILBERTA Z SUPREMUM

Sławomir Przybyło
Instytut Matematyki, Uniwersytet Pedagogiczny w Krakowie
przybyloslawek@gmail.com

W niniejszym referacie omówię podstawowe informacje na temat algebr Hilberta z supremum. Te struktury algebraiczno-porządkowe są podreduktami dużo lepiej znanych algebr Heytinga. Ich omówienie znaleźć można w [1], [2].

Algebra Heytinga $(H, \vee, \wedge, 0, 1, \rightarrow)$ to krata z elementem najmniejszym 0 i największym 1, w której dodatkowo dla dowolnych elementów a i b istnieje element największy w zbiorze $\{x \in H : a \wedge x \leq b\}$, który oznaczamy przez $a \rightarrow b$. Natomiast w przypadku algebr Hilberta z supremum mamy do czynienia tylko z działaniem półkratowym $\vee$, elementem największym 1 oraz działaniem $\rightarrow$, które siłą rzeczy musimy zdefiniować inaczej niż powyżej. Czyni się to podając odpowiednie aksjomaty.

W moim wystąpieniu podam definicję algebry Hilberta z supremum, przykłady i własności. Pokażę sposób definiowania filtrów w tej strukturze, a także to, w jaki sposób filtry te możemy utożsamiać z kongruencjami. Na koniec przedstawię twierdzenie o reprezentacji dla skończonych liniowych algebr Hilberta z supremum, mające znaczenie przy badaniu algebr wolnych w klasie tychże algebr.

[1] J. Berman, W. J. Blok, *Free Łukasiewicz and Hoop Residuations Algebras*, Studia Logica: An International Journal for Symbolic Logic **77** (2004), 153-180.

[2] L. Cabrer, S. A. Celani, *Duality for finite Hilbert algebras*, Discrete Mathematics **305** (2005), 74-99.

[3] S. A. Celani, D. Montangie, *Hilbert algebras with supremum*, Algebra Universalis **3** (2012), 237-255.

[4] P. Köhler, *Brouwerian semilattices*, Trans. Amer. Math. Soc, **268** (1981), 103-126.

WYKŁADNIK ŁOJASIEWICZA Z ALGEBRAICZNEGO PUNKTU WIDZENIA

Tomasz Rodak
Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Łódzki
rodakt@math.uni.lodz.pl

Niech $\mathcal{O}_n$ oznacza pierścień kiełków funkcji holomorficznych $(\mathbb{C}^n, 0) \to \mathbb{C}$ o ideale maksymalnym $\mathfrak{m}_n$. Wykładnik Łojasiewicza ideału $I = (f_1, \ldots, f_m)\mathcal{O}_n$ względem $h \in \mathcal{O}_n$ definiujemy wzorem

$$\mathfrak{L}_h(I) := \inf\{\theta > 0 : \exists_{C,\varepsilon>0} \forall_{||x||<\varepsilon} \max_j |f_j(x)| \geqslant C|h|^\theta\}.$$

Okazuje się, że niezmiennik ten daje się ująć jako pojęcie czysto algebraiczne. Na przykład M. Lejeuna–Jalabert i B. Teissier wykazali, że $\mathfrak{L}_h(I)$ jest kresem dolnym tych p/q, dla których kiełek h^p jest całkowity nad ideałem I^q. Jeśli zatem $(R, \mathfrak{m})$ jest pierścieniem lokalnym, $h \in R$ oraz I jest ideałem w R, to naturalnie jest przyjąć

$$\mathfrak{L}_h(I) := \inf\left\{\frac{p}{q} : h^p \in \overline{I^q}\right\}.$$

Inne rozszerzenia pojęcia wykładnika Łojasiewicza uzyskamy adaptując z przypadku zespolonego wzór oparty o parametryzacje, czy o wielomian charakterystyczny macierzy mnożenia $h \in \mathfrak{m}_n$ przez elementy $e_1, \ldots, e_\mu \in \mathcal{O}_n$ wyznaczające nad $\mathbb{C}$ bazę algebry $\mathcal{O}_n/I$ (gdy I jest $\mathfrak{m}_n$-prymarny i generowany przez ciąg regularny). Celem referatu będzie zbadanie przy jakich założeniach o pierścieniu $(R, \mathfrak{m})$ zasygnalizowane wyżej uogólnienia wykładnika Łojasiewicza prowadzą do tego samego pojęcia.

Podstawą referatu jest praca wspólna z S. Brzostowskim.

ALGEBRY IDEMPOTENTNE I ENTROPICZNE - WPROWADZENIE

Anna Romanowska
Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych, Politechnika Warszawska
A.Romanowska@mini.pw.edu.pl

Przez *algebrę* (*abstrakcyjną*) rozumieć będziemy parę (A, F), gdzie A jest zbiorem, a F jest rodziną operacji określonych na zbiorze A. Algebra taka jest *idempotentna*, jeśli każdy element tworzy jej podalgebrę, i jest entropiczna, jeśli każda operacja ze zbioru F jest homomorfizmem z odpowiedniej potęgi A w A. Obie te własności są równoważne spełnieniu pewnych równości. Np. w przypadku algebry $(A, +, \cdot)$ z dwiema binarnymi operacjami $+$ oraz $\cdot$, idempotentność oznacza spełnienie równości $x+x = x = x\cdot x$, natomiast entropiczność spełnienie równości $(x+y)\cdot(z+t) = (x\cdot z)+(y\cdot t)$. Algebry idempotentne i entropiczne nazywamy *modami*. Przykładów modów dostarczają półgrupy normalne (w tym półgrupy trywialne i półkraty), jednostronne quasigrupy modowe (stanowią pewne niezmienniki węzłów), wiele rodzajów grupoidów występujących w kombinatoryce i geometrii. Do tych ostatnich należą pewne algebraizacje przestrzeni afinicznych nad pierścieniami przemiennymi oraz ich podredukty (podalgebry reduktów), w szczególności zbiory wypukłe.

W referacie omówię najważniejsze modele algebr modowych, oraz przykłady własności charakterystycznych dla dowolnych algebr tego rodzaju. Podstawowe fakty dotyczące modów przedstawione są w niżej wymienionych monografiach. Od czasu ich publikacji, literatura przedmiotu znacznie się rozszerzyła.

[1] A. Romanowska, J. D. H. Smith, *Modal Theory - an Algebraic Approach to Order, Geometry and Convexity*, Heldermann Verlag, Berlin, 1985.

[2] A. Romanowska, J. D. H. Smith, *Modes*, World Scientific, New Jersey, London, Singapore, Hong Kong, 2002.

AUTOMORFIZMY STOPNIA DRUGIEGO TRIANGULARYZOWALNE LINIOWO

Kamil Rusek
Instytut Matematyki, Uniwersytet Pedagogiczny w Krakowie
krusek@up.krakow.pl

Badanie endomorfizmów wielomianowych stopnia drugiego przestrzeni $\mathbb{K}^n$, gdy $\operatorname{char}\mathbb{K} = 0$, (zwanych krótko *kwadratowymi*) jest pozornie łatwe (np. słynna Hipoteza Jakobianowa jest dla nich w oczywisty sposób prawdziwa). Szybko jednak prowadzi do kilku bardzo trudnych pytań, wciąż pozostających bez odpowiedzi. Jednym z nich jest następujące:

Czy każdy automorfizm kwadratowy jest złożeniem skończenie wielu automorfizmów *afinicznych* (tzn. stopnia pierwszego) oraz *elementarnych* (tzn. postaci $(X_1, \dots, X_{i-1}, X_i + f, X_{i+1}, \dots, X_n)$, gdzie $f \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_n]$)?

W referacie zajmiemy się pewną klasą automorfizmów kwadratowych, które mają powyższą własność, mianowicie automorfizmami *triangularyzowalnymi liniowo* (= t. l.), czyli takimi, które w grupie automorfizmów są sprzężone poprzez automorfizm liniowy z odwzorowaniami *trójkątnymi* (tzn. postaci $F = (F_1, \dots, F_n)$, gdzie $F_i \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_{i-1}]$).

Kompletny opis takiej klasy jest trudny. Meisters i Olech pokazali w [5], że dla $n \le 4$ wszystkie automorfizmy kwadratowe przestrzeni $\mathbb{K}^n$ są t. l.. Sformułowali również przypuszczenie, że każdy automorfizm kwadratowy o indeksie nilpotentności ≤ 3 (tzn. taki, że macierz Jacobiego jego składowej jednorodnej stopnia drugiego ma indeks nilpotentności ≤ 3) jest t. l..

Ta hipoteza była dotychczas udowodniona dla:

- *quasi–translacji* (tzn. automorfizmów kwadratowych postaci $F = I + H$, dla których $F^{-1} = I - H$) przez Jurkiewicza [3];
- automorfizmów *kwadratowo–liniowych* (tzn. postaci $F = I + H$, gdzie $H = (l_1^2, \dots, l_n^2)$, $l_1, \dots, l_n$ są formami liniowymi) o indeksie nilpotentności ≤ 3 przez Liu, Du i Suna [4].
- wszystkich automorfizmów kwadratowych o indeksie nilpotentności ≤ 3 dla $n \le 6$ przez Suna [6].

Warto zauważyć, że pierwsze dwa z powyższych rezultatów łatwo wynikają z klasycznych twierdzeń o wspólnej triangularyzacji rodzin macierzy nilpotentnych.

Umirbaev w pracy [7] scharakteryzował automorfizmy t. l. w języku własności skojarzonych z nimi tzw. *algebr polaryzacyjnych*. Wyjaśnimy, że dzięki takiemu podejściu hipoteza Meistersa i Olecha jest niemal bezpośrednim wnioskiem z pracy Fernandeza [2].

Pokażemy, że z prawdziwości tej hipotezy wynika m. in., że wszystkie automorfizmy kwadratowo–liniowe o indeksie nilpotentności ≤ 4 są t. l.. Pokażemy, że dla $n \ge 5$ istnieją automorfizmy kwadratowe o indeksie nilpotentności 4, które nie są t. l..

Wszystkie niezbędne informacje o automorfizmach wielomianowych można znaleźć w monografii van den Essena [1].

[1] A. van den Essen, *Polynomial Automorphisms and the Jacobian Conjecture*, Birkhäuser, 2000.

[2] J. C. G. Fernandez, *Commutative finite–dimensional algebras satisfying $x(x(xy)) = 0$ are nilpotent*, Comm. in Algebra **37**(2009), 3760–3776.

[3] J. Jurkiewicz, *Linearization of the multiplicative group action of degree two and Jordan algebras*, Bull. Ac. Polon.: Math. **32**(1984), 387–391.

[4] D. Lin, X. Du, X. Sun, *Quadratic linear Keller maps of nilpotency index three*, Linear Algebra Appl. **429**(2008), 12–17.

[5] G. Meisters, C. Olech, *Strong nilpotence holds in dimensions up to five only*, Linear Multilinear Algebra **30**(1991), 231–255.

[6] X. Sun, *On the Strong Nilpotence Problem*, Algebra Colloquium **21**(2014), 117–128.

[7] U. U. Umirbaev, *Polarization algebras and their relations*, Preprint series **2014**(60), Max–Planck–Institut für Mathematik Bonn.

O POJEMNOŚCI LINIOWEJ ZBIORÓW MACIERZY

Marcin Skrzyński
Instytut Matematyki, Politechnika Krakowska
pfskrzyn@cyf-kr.edu.pl

W 1949 roku Jean Dieudonné opublikował dowód twierdzenia mówiącego, że podprzestrzeń liniowa przestrzeni wszystkich macierzy kwadratowych rozmiaru n nad (dowolnym) ciałem $\mathbb{F}$ składająca się wyłącznie z macierzy osobliwych ma wymiar nie większy niż $n(n-1)$ i że każda „podprzestrzeń osobliwa" wymiaru równego $n(n-1)$ jest podobna albo do podprzestrzeni złożonej ze wszystkich macierzy o zerowym pierwszym wierszu, albo do podprzestrzeni złożonej ze wszystkich macierzy o zerowej pierwszej kolumnie. Pytania o maksymalny wymiar podprzestrzeni liniowej zawartej w pewnym zbiorze macierzy, czyli o pojemność liniową tego zbioru, i o postać podprzestrzeni mających maksymalny wymiar stawiali sobie później (i stawiają nadal) liczni matematycy. W referacie omówię niektóre wyniki dotyczące tych pytań, m.in. twierdzenie Flandersa-Meshulama o pojemności liniowej rozmaitości determinantalnej, twierdzenia Gerstenhabera-Sieriożkina o pojemności liniowej stożków nilpotentnych oraz twierdzenia Omladiča–Šemrla–Loewy'ego–Radwana o pojemności liniowej zbiorów macierzy z wielokrotnymi wartościami własnymi.

ROZMAITOŚCI FREGOWSKIE

Katarzyna Słomczyńska
Instytut Matematyki, Uniwersytet Pedagogiczny w Krakowie
kslomcz@up.krakow.pl

W wykładzie omówię rozmaitości (czyli klasy algebr tego samego typu zamknięte na operacje obrazów homomorficznych, podalgebr oraz produktów), których kraty kongruencji spełniają dwa warunki: *kongruencyjną porządkowalność* i *regularność,* nazywane *rozmaitościami fregowskimi.* Jako, że podstawowa inspiracja dla ich badania płynęła oryginalnie z logiki, nic więc dziwnego, że typowych przykładów rozmaitości fregowskich dostarczają algebraiczne semantyki dla logiki intuicjonistycznej i pośrednich logik zdaniowych oraz ich fragmentów. Fakt ten umieszcza studia nad rozmaitościami fregowskimi w szerokim nurcie algebry uniwersalnej, zajmującym się algebraizacją logik zdaniowych, a biorącym swój początek w działalności polskich matematyków i logików: J. Łukasiewicza, A. Tarskiego, A. Lindenbauma, H. Rasiowej czy J. Łosia.

Wśród rozmaitości fregowskich szczególnie dobrze poznana jest struktura rozmaitości *kongruencyjnie permutowalnych.* W szczególności wiemy, że każda taka rozmaitość składa się z algebr, będących rozszerzeniami pewnych algebr rownoważnościowych, które z kolei są algebraicznym odpowiednikiem równoważnościowego fragmentu intuicjonistycznej logiki zdaniowej. Podstawowym narzędziem do badania rozmaitości fregowskich jest teoria komutatora. Można pokazać, że każda skończona algebra z kongruencyjnie permutowalnej rozmaitości fregowskiej jest wielomianowo bogata, czyli każda operacja na niej zachowująca kongruencje i komutator musi już być wielomianem. Ponadto da się taką algebrę odbudować (z dokładnością do wielomianowej równoważności) z jej kraty kongruencji wyposażonej w komutator. Prowadzi to nas do pojęcia *fregowskiego szkieletu* oraz pozwala w niektórych przypadkach skonstruować skończenie generowane wolne algebry w rozmaitości i obliczyć lub oszacować jej wolne widmo.

[1] P. M. Idziak, KS, *Polynomially rich algebras*, Journal of Pure and Applied Algebra **156** (2001), 33–68.

[2] KS, *Free equivalential algebras*, Annals of Pure and Applied Logic **155** (2008), 86–96.

[3] P. M. Idziak, KS, A. Wroński, *Fregean varieties*, International Journal of Algebra and Computations **19** (2009), 595–645.

[4] P. M. Idziak, KS, A. Wroński, *Commutator in equivalential algebras and Fregean varieties*, Algebra Universalis **65** (2011), 331–340.

EPIMORFIZMY MACIERZY NIESKOŃCZONYCH GÓRNOTRÓJKĄTNYCH

Roksana Słowik
Instytut Matematyki, Politechnika Śląska
roksana.slowik@polsl.pl

Niech F będzie ciałem o co najmniej trzech elementach. Rozpatrujemy macierze nad F, których wiersze oraz kolumny są indeksowane kolejnymi liczbami naturalnymi. Niech $\mathcal{T}_\infty(F)$ oznacza zbiór wszystkich takich macierzy, które są górnotrójkątne, natomiast $T_\infty(F)$ - podzbiór $\mathcal{T}_\infty(F)$ składających się z macierzy, których wszystkie współczynniki znajdujące się na głównej przekątnej są różne od 0. Nietrudno sprawdzić, że $\mathcal{T}_\infty(F)$ tworzy pierścień, a $T_\infty(F)$ grupę. W trakcie referatu podamy opis epimorfizmów grupy $T_\infty(F)$ oraz pierścienia $\mathcal{T}_\infty(F)$. Wskażemy główne argumenty, które zostały wykorzystane w dowodach. Ponadto, korzystając z wspomnianych wyników, wskażemy grupy automorfizmów $T_\infty(F)$ oraz $\mathcal{T}_\infty(F)$.

[1] G.P. Barker, *Automorphism groups of algebras of triangular matrices*, Linear Algebra Appl. **121** (1989), 207–215.

[2] D.Ž. Djoković, *On homomorphisms of the general linear group*, Aequationes Math. **4** (1970), 99–102.

[3] S. Jøndrup, *Automorphisms of upper triangular matrix rings*, Arch. Math. (Basel) **49** (1987), 497–502.

[4] T.P. Kezlan, *A note on algebra automorphisms of triangular matrices over commutative rings*, Linear Algebra Appl. **135** (1990) 181–184.

[5] V.M. Levchuk, *Automorphisms of the group of invertible triangular matrices over a ring* (ros.), Permanents: theory and applications, 39–46, Krasnoyarsk, Politekhn. Inst. Krasnoyarsk, 1990.

[6] R. Słowik, *The lower central series of the Vershik-Kerov group*, Linear Algebra Appl. **436** (2012), 2299–2310.

[7] R. Słowik, *On one property of normal subgroups of $UT_\infty(R)$*, Linear Algebra Appl. **437** (2012), 2300–2307.

[8] R. Słowik, *Maps on infinite triangular matrices preserving idempotents*, Linear Multilinear Algebra **62** (2014), 938–964.

[9] R. Słowik, *Epimorphisms of infinite triangular and unitriangular matrices*, Linear Algebra Appl. **462** (2014), 186–203.

[10] R. Słowik, *Epimorphisms of the ring of infinite triangular matrices*, Linear Multilinear ALgebra **63** (2015), 1372–1378.

[11] X. Zhang, C. Cao, Y. Hu, *Multiplicative group automorphisms of invertible upper triangular matrices over fields*, Acta Math. Sci. Ser. B Engl. Ed. **20** (2000), 515–521.

GRUPY I QUASIGRUPY KWANTOWE

Jonathan Smith
Iowa State University, Politechnika Warszawska
jdhsmith@iastate.edu

Niech $\mathbf{C}$ będzie kategorią symetryczną monoidalną, tzn. z określonymi w niej przemiennym i łącznym formalnym produktem obiektów $\otimes$ oraz z jedynką $\mathbf{1}$. W przypadku kategorii $\mathbf{Set}$ zbiorów, produkt $\otimes$ jest zwykłym produktem kartezjańskim, a $\mathbf{1}$ jest zbiorem jednoelementowym. W przypadku kategorii $\underline{\underline{K}}$ przestrzeni wektorowych nad ciałem K, produkt $\otimes$ jest iloczynem tensorowym, a $\mathbf{1}$ jest przestrzenią jednowymiarową K.

Przez *algebrę Hopfa* lub *grupę kwantową* rozumiemy obiekt A lub

$$(A, \nabla \colon A \otimes A \to A, \Delta \colon A \to A \otimes A, \eta \colon \mathbf{1} \to A, \varepsilon \colon A \to \mathbf{1}, S \colon A \to A)$$

takiej kategorii $\mathbf{C}$, spełniający aksjomaty podobne, jak w przypadku zwykłej grupy A w kategorii $\mathbf{Set}$, gdzie np. $\nabla \colon (a_1, a_2) \mapsto a_1 a_2$ jest mnożeniem, $S \colon A \to A; a \mapsto a^{-1}$, i komnożenie określone jest przez $\Delta \colon a \mapsto (a, a)$.

Przez *quasigrupę kwantową* rozumiemy obiekt A lub

$$(A, \nabla \colon A \otimes A \to A, \Delta \colon A \to A \otimes A)$$

taki, że

$$\Delta \colon (A, \nabla) \to (A \otimes A, \nabla)$$

jest homomorfizmem, oraz *lewostronne złożenie*

$$A \otimes A \xrightarrow{\Delta \otimes 1_A} A \otimes A \otimes A \xrightarrow{1_A \otimes \nabla} A \otimes A \tag{1}$$

i *prawostronne złożenie*

$$A \otimes A \xrightarrow{1_A \otimes \Delta} A \otimes A \otimes A \xrightarrow{\nabla \otimes 1_A} A \otimes A \tag{2}$$

są odwracalne.

Każda algebra Hopfa jest quasigrupą kwantową. Np. morfizmem odwrotnym do (1) jest

$$A \otimes A \xrightarrow{\Delta \otimes 1_A} A \otimes A \otimes A \xrightarrow{1_A \otimes S \otimes 1_A} A \otimes A \otimes A \xrightarrow{1_A \otimes \nabla} A \otimes A\,.$$

Znane są a warunki wystarczające na to, aby quasigrupa kwantowa skończonego wymiaru w kategorii $\underline{\underline{K}}$ tworzyła algebrę Hopfa. Natomiast struktura oktonionów, jak również zbiór algebraiczny funkcji regularnych $\mathbb{R}[S^7]$, dają quasigrupy kwantowe w $\underline{\underline{\mathbb{R}}}$, które nie są algebrami Hopfa. W kategorii zbiorów skończonych, quasigrupy kwantowe Q, z komnożeniem

$$\Delta \colon Q \to Q \times Q; a \mapsto (a^L, a^R)\,,$$

odpowiadają quasigrupom (Q, ∇) (czyli kwadratom łacińskim) z wyznaczonymi automorfizmami L i R struktury (Q, ∇).

[1] A. Białynicki-Birula, *Wykłady z geometrii algebraicznej*, Księgozbiór Matematyczny, **1**, IM-PAN, Warszawa, 2013.

[2] S. Mac Lane, *Categories for the working mathematician*, Graduate Texts in Mathematics, **5**, Springer, New York, 1971.

[3] D.E. Radford, *Hopf algebras*, Series on Knots and Everything, **49**, World Scientific, Singapore, 2012.

AUTOMORFIZMY PIERŚCIENI WITTA

Marcin Ryszard Stępień
Katedra Matematyki, Politechnika Świętokrzyska
mstepien@tu.kielce.pl

Jednym z podstawowych pojęć syntetyzujacych w algebraicznej teorii form kwadratowych jest wprowadzony w pracy [1] pierścień nazywany obecnie pierścieniem Witta. Struktura i własności pierścieni Witta silnie zależą od ciała współczynników form kwadratowych. W związku z tym od początku ważnym zagadnieniem było sklasyfikowanie wszystkich pierścieni Witta z dokładnością do tzw. mocnych izomorfizmów, tj. izomorfizmów zachowujących wymiary form. Zadanie to nie zostało w pełni rozwiązane, jednak istnieje wiele wyników, zwłaszcza dotyczących skończenie generowanych pierścieni Witta ([2]).

Naturalną kontynuacją i uzupełnieniem tych badań jest pytanie o automorfizmy pierścieni Witta. Nie chodzi tu jednak o zwykłe automorfizmy pierścieni, ale o mocne automorfizmy, które zachowują strukturę pierścieni Witta. Ze względu na ogromną różnorodność pierścieni Witta związaną z zależnością od ciała współczynników, nie istnieje jeden uniwersalny opis mocnych automorfizmów dla dowolnego pierścienia Witta. Dlatego grupy mocnych automorfizmów opisuje się dla różnych klas pierścieni Witta o podobnych własnościach, korzystając ze znanych ich klasyfikacji.

Łatwo pokazać, że dowolny automorfizm ciała K indukuje mocny automorfizm pierścienia Witta $W(K)$ form kwadratowych nad tym ciałem. Pokażemy, że istnieją mocne automorfizmy pierścieni Witta nie pochodzące od automorfizmów ciała współczynników. Przedstawimy opisy grup mocnych automorfizmów dla pierścieni Witta nad ciałami skończonymi, lokalnymi, globalnymi, pitagorejskimi, dla pierścieni grupowych oraz ich produktów prostych. Pokażemy, w jaki sposób uzyskane wyniki można wykorzystać do poszukiwania mocnych automorfizmów dla wszystkich skończenie generowanych pierścieni Witta.

[1] E. Witt,*Theorie der quadratischen Formen in beliebigen Körpern*, J. Reine Angew. Math. **176** (1937), 31—44.

[2] K. Szymiczek. *Bilinear Algebra: an Introduction to the Agebraic Theory of Quadratic Forms.* Algebra, Logic and Applications Series Vol. **7**, Gordon and Breach Science Publishers, Amsterdam 1997.

UOGÓLNIENIA TWIERDZENIA BURNSIDE'A O BAZIE

Agnieszka Stocka
Instytut Matematyki, Uniwersytet w Białymstoku
stocka@math.uwb.edu.pl

Zakładamy, że wszystkie omawiane grupy będą skończone. Jeśli G będzie grupą, to przez $\Phi(G)$ będziemy oznaczać zbiór elementów niegenerujących grupy G. Z Twierdzenia Burnside'a o bazie wiemy, że jeśli G jest p-grupą, to grupę $G/\Phi(G)$ możemy traktować jak przestrzeń liniową nad ciałem p-elementowym. Będziemy rozważać grupy, w których zbiory generatorów mają podobe własności, jak te wynikające z Twierdzenia Burnside'a dla p-grup. W naszych rozważaniach użyjemy aparatu pojęciowego zaczerpniętego z teorii matroidów.

[1] J. Krempa, A. Stocka, *On finite groups with pp-basis property,* Bull. Aust. Math. Soc. **91** (2015), 241–249.

[2] D. J. S. Robinson, *A Course in the Theory of Groups,* (2nd edition), Springer-Verlag, New York, 1996.

[3] R. Scapellato, L. Verardi, *Groupes finis qui jouissent d'une propriété analogue au théorème des bases de Burnside.,* Boll. Unione Mat. Ital. A **(7) 5** (1991), 187–194.

[4] H. Whitney, *On the abstract properties of linear dependence,* Trans. Amer. Math. Soc. **34** (1932), 339–362.

LOKALNIE SKOŃCZONE GRUPY AUTOMORFIZMÓW BEZATOMOWEJ PRZELICZALNEJ ALGEBRY BOOLE'A

Vitaliy Sushchansky
Instytut Matematyki, Politechnika Śląska
vitaliy.sushchanskyy@polsl.pl

Grupa automorfizmów $Aut\mathcal{B}$ bezatomowej przeliczalnej algebry Boole'a $\mathcal{B}$ należy do tzw. "dużych" grup. Jest ona izomorficzna z grupą homeomorfizmów przestrzeni Cantora [2] i nie zawiera nietrywialnych dzielników normalnych [1]. Jednak struktura podgrupowa tej grupy dotychczas była mało badana.

W referacie zostaną omówione naturalne metody konstruowania gęstych podgrup lokalnie skończonych podgrupy grupy $Aut\mathcal{B}$. Z przedstawionych konstrukcji wynika, że dowolna przeliczalna grupa lokalnie skończona jest zanurzalna w $Aut\mathcal{B}$.

[1] R.D. Anderson, *The algebraic simplicity of certain groups of homeomorphisms*, Amer. J. Math. 80 (1958), str. 955–963.

[2] R. Sikorski, *Boolean Algebra*, II edition, Springer-Verlag NY 1964, str. 34.

STAŁE HARBOURNE'A DLA KONFIGURACJI KRZYWYCH NISKIEGO STOPNIA

Justyna Szpond
Instytut Matematyki, Uniwersytet Pedagogiczny w Krakowie
szpond@up.krakow.pl

W ostatnich latach dużym zainteresowaniem cieszą się negatywne krzywe na powierzchniach algebraicznych. Jednym z bardziej interesujących pytań dotyczących tej dziedziny jest Hipoteza o ograniczonej negatywności. Hipoteza ta przewiduje, że na każdej zespolonej powierzchni istnieje ograniczenie dolne na samoprzecięcie zredukowanych krzywych. Nie wiadomo również, czy ta własność jest niezmiennikiem klasy biwymiernych powierzchni. Stałe Harbourne'a, badające dolne ograniczenie samoprzecięcia zredukowanych krzywych w klasie biwymiernych powierzchni, pojawiły się po raz pierwszy w pracy [1].

Definicja 1 *Niech X będzie gładką powierzchnią rzutową, $\mathcal{P} = \{P_1, \ldots, P_s\}$ zbiorem różnych punktów na X. Stałą Harbourne'a powierzchni X w $\mathcal{P}$ nazywamy*

$$H(X, \mathcal{P}) := \inf \frac{\widetilde{C}^2}{s},$$

gdzie $\widetilde{C}$ jest właściwą tranformatą krzywej C względem rozdmuchania $f : Y \to X$ powierzchni X w punktach $\mathcal{P}$ a minimum liczone jest po wszystkich zredukowanych krzywych $C \subset X$.

W przypadku, gdy krzywa zredukowana $\mathcal{L}$ na wszystkie składowe będące prostymi, mówimy o liniowej stałej Harbourne'a $H_L(\mathbb{K}, \mathcal{L})$, gdzie $\mathbb{K}$ oznacza ciało. W pracy [1] przedstawiony został następujący wynik

Twierdzenie 1 *Niech $C = L_1 \cup \ldots \cup L_d$ będzie krzywą zredukowaną w zespolonej przestrzeni rzutowej $\mathbb{P}^2$, której każdą składową L_i jest prosta. Niech $P_1, \ldots, P_s$ będą punktami, w których przecinają się co najmniej dwie spośród prostych $L_1, \ldots, L_d$. Niech m_i będzie liczbą prostych przechodzących przez punkt P_i. Wówczas*

$$H_L(\mathbb{C}, C) = \frac{d^2 - \sum_{i=1}^{s} m_i^2}{s} > -4.$$

Wiadomo natomiast, że w przypadku ciał charakterystyki dodatniej stała ta nie jest ograniczona od dołu. Można zatem pytać, o wartość tzn. absolutnej liniowej stałej Harbourne'a stopnia d.

Definicja 2 *Liniową stała Harbourne'a stopnia d konfiguracji $\mathbb{K}$-prostych nazywamy*

$$H_L(\mathbb{K}, d) := \min H_L(\mathbb{K}, \mathcal{L}),$$

gdzie minimum jest liczone po wszystkich konfiguracjach d-prostych w $\mathbb{P}^2$. Absolutną liniową stałą Harbourne'a nazywamy

$$H_L(d) := \min_{\mathbb{K}} H_L(\mathbb{K}, d),$$

gdzie minimum liczone jest po wszystkich ciałach.

W pracy [2] przedstawiłam wartości zespolonych i absolutnych liniowych stałych Harbourne'a dla konfiguracji d prostych, gdzie $d \leq 10$.

[1] Th. Bauer,S. Di Rocco, B. Harbourne, J. Huizenga,A. Lundman, P. Pokora, T. Szemberg, *Bounded Negativity and Arrangements of Lines*. przyjęta do druku w International Mathematics Research Notices, doi:10.1093/imrn/RNU236.

[2] J. Szpond, *On linear Harbourne constants*, arXiv:1406.6662.

KWADRYKI I WIĄZKI WEKTOROWE NA NICH

Michał Szurek
szurek.michal@gmail.com

W późnych latach siedemdziesiątych i potem w osiemdziesiątych dwudziestego wieku były w geometrii algebraicznej bardzo modne wiązki wektorowe i ich przestrzenie *moduli*, a to w związku z odkryciem metod, jakimi można takie wiązki badać. Nastapił swoisty wyścig naukowy: przez kilkanaście lat stosunkowo łatwe tematy leżały na wyciągnięcie ręki. Bywało, że do redakcji czasopism przychodziło w odstępie kilkumiesięcznym kilka prac na ten sam temat (poczta elektroniczna i internet dopiero raczkowały!) Wziąłem udział w tym wyścigu, zajmując („w drużynie" - wspólne prace z Jarosławem Wiśniewskim, Ignacio Solsem, Thomasem Peternellem i Giorgio Ottavianim) całkiem dobre miejsce. Większość tych prac dotyczyła klasyfikacji wiązek na zespolonych przestrzeniach rzutowych $\mathbf{P}^2$ i $\mathbf{P}^3$, ale tu opowiem o kwadrykach (=powierzchniach stopnia 2) i wiązkach na nich.

Po pierwsze, sama geometria kwadryki jest wystarczająco intrygująca, a choć dogłębnie zbadana, wciąż są miejsca do nowych odkryć, szczególnie dla $\mathbf{Q}_4 = \mathrm{Grass}(1,3)$, Po drugie okazało się, że stare odkrycia zyskują ciekawą interpretacje w świetle współczesnych badań. Na przykład klasyczny *Poncelet porism* wynika z konfiguracji prostych wyjątkowych dla stabilnej wiązki rangi 2 o klasach Cherna 0, 1. Jest tu pewna anologia z teorią liczb, gdzie mawia się niekiedy, że w XIX wieku znano różne liczby - obecnie liczby te są dla nas rzędami pewnych grup.

Charakter klasyfikacji omawianych wiązek wektorowych można zrozumieć na takim przykładzie. Najprostszym nietrywialnym przypadkiem są (na kwadryce $\mathbf{Q}_3$) wiązki stabilne - cokolwiek to znaczy - o klasach Cherna $c_1 = 0$, $c_2 = 2$. Linie wyjątkowe (jumping lines, tj. proste, na których wiązka rozkłada się na czynniki liniowe inaczej niż na prostej ogólnej) takiej wiązki tworzą pewną kwadrykę w $\mathbf{P}^3$, - musimy przedtem ustalić utożsamienie zbioru linii prostych na $\mathbf{Q}_3$ z przestrzenią rzutową $\mathbf{P}^3$. Utożsamienie jest wyznaczone przez macierz antysymetryczną. Mamy zatem na $\mathbf{P}^3$ dwie formy: symetryczną i antysymetryczną. Klasyfikacja wiązek - to klasyfikacja wzajemnego położenia tych dwóch form względem siebie.

Charakterystyczną cechą badań wiązek na kwadrykach był właśnie ładny *interplay* między klasycznymi metodami sprzed ponad stu lat, a nowoczesną techniką (monady, ciągi spektralne itp.). Koloryzując, można powiedzieć, że czuło się oddech przeszłości.

W końcowej części referatu omówię bardzo skrótowo, w jakich kierunkach poszedł rozwój tych zagadnień przez minione 30 lat.

TOŻSAMOŚCI GRUPOWE POSTACI $AB \equiv BA$

Witold Tomaszewski
Instytut Matematyki, Politechnika Śląska
Witold.Tomaszewski@polsl.pl

W pracy [1] N.D. Gupta badał tożsamości postaci $[x, y] = [x,_n y]$ i udowodnił, że dla $n = 2, 3$ każda grupa spełniająca taką tożsamość jest abelowa. Zadał też pytanie, czy dla $n \geq 4$ każda grupa spełniająca tożsamość $[x, y] = [x,_n y]$ jest abelowa? Problem okazał się trudny i nadal jest otwarty. W trakcie badań nad tymi tożsamościami okazało się, że tożsamości $[x, y] = [x,_n y]$ można zapisać w równoważnej postaci $ab \equiv ba$ gdzie a, b są słowami dwu-generowanej grupy wolnej. Pojawiło się pytanie dla jakich słów a, b wszystkie grupy spełniające tożsamość $ab \equiv ba$ są abelowe? W referacie zostaną przedstawione wyniki badań nad tożsamościami postaci $ab \equiv ba$. Na początku referatu omówione zostaną różne inspiracje do podjęcia tych badań (jedną z nich jest praca [1], ale są też inne). Potem przedstawione zostaną warunki, jakie muszą spełniać słowa a, b na to aby tożsamość $ab \equiv ba$ była równoważna tożsamości abelowej. W dalszej części omówione będą wyniki dla słów a, b należących szczególnych klas słów grupy wolnej. Pokazane zostaną też liczne przykłady oraz powiązania tych badań z różnymi otwartymi problemami teorii grup. Pod koniec referatu przedstawione będę dalsze perspektywy badań oraz problemy otwarte. Część omawianych wyników pojawiło się w przyjętej do druku pracy [2].

[1] N.D. Gupta, Groups with Engel-like conditions, *Arch. Math.* (Basel) **17** 1966, 193-–199.

[2] W. Tomaszewski, On laws of the form $ab \equiv ba$ equivalent to the abelian law, przyjęte do druku w Rend. Sem. Mat. Univ. Padova.

O WYJĄTKOWYM AUTOMORFIZMIE ALGEBRY $\mathfrak{SO}(8)$.

Andrzej Weber
Instytut Matematyki, Uniwersytet Warszawski
aweber@mimuw.edu.pl

Proste algebry Lie zostały sklasyfikowane pod koniec XIX wieku przez Wilhelma Killinga i Élie Cartana. Zadane są one przez obiekt kombinatoryczny – przez diagram Dynkina. Algebrze $\mathfrak{so}(8)$ odpowiada diagram w kształcie litery Y. Nie jest rzeczą oczywistą, że automorfizm diagramu (obrót o 120^o) zadaje automorfizm algebry $\mathfrak{so}(8)$. Jednak taki automorfizm istnieje i został opisany przez Élie Cartana w roku 1925. Po angielsku nazywany jest „triality" poprzez analogię z „duality" (dualność). Zbiór punktów stałych tego automorfizmu jest wyjątkową algebrą Lie $\mathfrak{g}_2$. Opiszę kilka ciekawych własności „tójności" oraz powiem o związku z teorią osobliwości funkcji gładkich, gdzie osobliwość D_4 jest także opisana przez diagram dynkina w kształcie litery Y.

[1] E. Cartan, *Le principe de dualité et la théorie des groupes simples et semi–simples*, Bulletin sc. Math. (2) **49** (1925), 361–374.

[2] M. Mikosz, A. Weber *Triality, characteristic classes, D_4 and G_2 singularities*, Journal of Homotopy and Related Structures, (2014), w druku

O PODGRUPIE KWADRATOWEJ MIESZANEJ SI-GRUPY

Mateusz Woronowicz
Instytut Matematyki, Uniwersytet w Białymstoku
mworonowicz@math.uwb.edu.pl

Podgrupą kwadratową grupy abelowej A nazywamy najmniejszą względem inkluzji podgrupę B grupy A taką, że każdy pierścień R o grupie addydtywnej A spełnia warunek $R^2 \subseteq B$. Pierwsze badania związane z tym pojęciem prowadzili A. E. Stratton oraz M. C. Webb. Kontynuowali je irańscy matematycy A. M. Aghdam oraz A. Najafizadeh, co na przestrzeni lat zaowocowało kilkoma interesującymi publikacjami.

Przedstawię najnowsze wyniki dotyczące zagadnieia podgrupy kwadratowej grupy abelowej, które uzyskałem wspólnie dr. hab. Ryszardem R. Andruszkiewiczem, prof. UwB. Szczególną uwagę zwrócę na strukturę podgrupy kwadratowej mieszanej SI-grupy, tzn. takiej grupy abelowej A, która nie jest ani torsyjna ani beztorsyjna oraz w dowolnym (niekoniecznie łącznym) pierścieniu o grupie addytywnej A każdy podpierścień jest ideałem. Co zaskakujące, przy rozwiązaniu tego problemu istotną rolę odgrywa wiedza z zakresu pierścieni filialnych.

W trakcie referatu pojawią się liczne dygresje na temat grup addytywnych pierścieni łącznych, zaniedbywanych przez zdecydowaną większość badaczy zajmujących się grupami addytywnymi pierścieni.

[1] A. M. Aghdam, *Square subgroup of an Abelian group*, Acta. Sci. Math. **51** (1987), 343–348.

[2] A. M. Aghdam, A. Najafizadeh, *Square subgroups of rank two Abelian groups*, Colloq. Math. **117**(1) (2009), 19–28.

[3] A. M. Aghdam, A. Najafizadeh, *Square submodule of a module*, Mediterr. J. Math. **7**(2) (2010), 195–207.

[4] R. R. Andruszkiewicz, M. Woronowicz, *On associative ring multiplication on abelian mixed groups*, Comm. Algebra **42** (9) (2014), 3760–3767.

[5] R. R. Andruszkiewicz, M. Woronowicz, *On SI-groups*, Bull. Aust. Math. Soc. **91** (2015), 92–103;

[6] R. R. Andruszkiewicz, M. Woronowicz, *Some new results for the square subgroup of an abelian group*, Comm. Algebra (to appear).

[7] S. Feigelstock, *Additive groups of rings whose subrings are ideals*, Bull. Austral. Math. Soc. **55** (1997), 477–481.

[8] S. Feigelstock, *Additive groups of rings. Vol. 1*, Pitman Advanced Publishing Program, Boston, 1983.

[9] L. Fuchs, *Infinite abelian groups volume 1*, Academic Press, New York, London, 1970.

[10] L. Fuchs, *Infinite abelian groups volume 2*, Academic Press, New York, London, 1973.

[11] A. E. Stratton, M. C. Webb, *Abelian groups, nil modulo a subgroup, need not have nil quotient group*, Publ. Math. Debrecen. **27**(1980), 127–130.

ŚREDNIOWALNE GRUPY AUTOMATÓW ZMIENNYCH W CZASIE GĘSTE W GRUPACH PROSKOŃCZONYCH

Adam Woryna
Wydział Matematyki Stosowanej, Politechnika Śląska
adam.woryna@polsl.pl

Badamy ostatnio otrzymany wynik (Twierdzenie 4.8, [1]) dotyczący średniowalności (amenability) grup ograniczonych automorfizmów drzewa poziomowo jednorodnego z korzeniem, aby pokazać, że dowolna niemal finitarna grupa (nearly finitary group - [3]) jest średniowalna. Rezultat ten stosujemy do dwóch konstrukcji grupowych, które pochodzą z prac [2, 3]. Konstrukcje te w sposób naturalny można zdefiniować w języku automatów zmiennych w czasie nad tzw. zmiennym alfabetem $X = (X_i)_{i\geq 1}$, gdzie X_i są skończonymi, niepustymi zbiorami. W pracach [2, 3] pokazujemy, że zbiór stanów każdego z tych automatów stanowi skończony, topologiczny zbiór generatorów dla granicy odwrotnej

$$\wr_{i=1}^{\infty} G_i := \varprojlim_{i\to\infty} (\ldots (G_i \wr_{X_{i-1}} \ldots \wr_{X_3} G_3) \wr_{X_2} G_2) \wr_{X_1} G_1 \tag{1}$$

iterowanych, permutacyjnych splotów pewnych przechodnich grup permutacji G_i zbiorów X_i. W szczególności otrzymujemy następujące

Twierdzenie 1 *Niech $X = (X_i)_{i\geq 1}$ będzie dowolnym zmiennym alfabetem i niech $(H_i)_{i\geq 1}$ będzie dowolnym ciągiem prostych, nieabelowych i przechodnich grup permutacji zbiorów X_i. Wówczas granica odwrotna $\wr_{i=1}^{\infty} H_i$ jest topologicznym domknięciem 2-generowanej, średniowalnej, niemal finitarnej grupy G. Grupa G jest generowana przez automat $\mathcal{A}$ o trzech stanach, przy czym jeden ze stanów jest neutralny, a pozostałe dwa generują półgrupę wolną. Automat $\mathcal{A}$ jest samopodobny i typu branch nad ciągiem odpowiednich komutantów. W szczególności G ma wzrost wykładniczy i jest grupą typu weakly branch.*

Twierdzenie 2 *Niech $X = (X_i)_{i\geq 1}$ będzie dowolnym zmiennym alfabetem i niech $(A_i)_{i\geq 1}$ będzie dowolnym ciągiem nietrywialnych, abelowych i przechodnich grup permutacji zbiorów X_i dla których ranga topologiczna ρ nieskończonego iloczynu kartezjańskiego $\prod_{i=1}^{\infty} A_i$ jest skończona. Wówczas granica odwrotna $\wr_{i=1}^{\infty} A_i$ jest topologicznym domknięciem średniowalnej, 2ρ-generowanej grupy G typu weakly branch, której komutant G' jest grupą niemal finitarną. Grupa G jest generowana przez samopodobny automat $\mathcal{B}$ o 2ρ stanach $a_1, \ldots, a_\rho$, $b_1, \ldots, b_\rho$ takich, że każda z grup $gp(a_1, \ldots, a_\rho)$ i $gp(b_1, \ldots, b_\rho)$ jest wolną grupą abelową rangi ρ. Ponadto półgrupa $sgp(a_1, \ldots, a_\rho, b_1, \ldots, b_\rho)$ jest iloczynem wolnym półgrup $sgp(a_1, \ldots, a_\rho)$ i $sgp(b_1, \ldots, b_\rho)$. W szczególności grupa G ma wzrost wykładniczy.*

[1] K. Juschenko, V. Nekrashevych, M. de la Salle, *Extensions of amenable groups by recurrent grupoids*, (preprint, arXiv:1305.2637v2), 2013.

[2] A. Woryna. *The topological decomposition of inverse limits of iterated wreath products of finite Abelian groups*, Forum Math. 25 (2013), 1263—1290

[3] A. Woryna. *On some universal construction of minimal topological generating sets for inverse limits of iterated wreath products of non-Abelian finite simple groups*, J Algebr Comb DOI 10.1007/s10801-015-0584-3.

LICZBA ROZWIĄZAŃ W ILOCZYNIE KARTEZJAŃSKIM PRZEDZIAŁÓW RÓWNANIA LINIOWEGO O WSPÓŁCZYNNIKACH ZE SKOŃCZONEJ GRUPY ABELOWEJ

Maciej Zakarczemny
Instytut Matematyki, Politechnika Krakowska
mzakarczemny@pk.edu.pl

Celem referatu jest przedstawienie dwóch twierdzeń udowodnionych odpowiednio w pracach [1] oraz [2].

Twierdzenie 1. *Dla każdej skończonej grupy abelowej* Γ *oraz dla dowolnych* $a_1, \dots, a_k \in \Gamma$, *liczba rozwiązań równania* $\sum_{i=1}^{k} a_i x_i = 0$ *w nieujemnych całkowitych* $x_i \leq b_i$, *gdzie* b_i *są całkowite dodatnie, jest co najmniej*

$$2^{1-D(\Gamma)} \prod_{i=1}^{k} (b_i + 1),$$

gdzie $D(\Gamma)$ *to stała Dawenporta grupy* Γ. *Współczynnik* $2^{1-D(\Gamma)}$ *jest najlepszym możliwym współczynnikiem niezależnym od* a_i, b_i, *a zależnym tylko od* Γ.

Twierdzenie 2. *Dla każdej skończonej grupy abelowej* Γ *oraz dla dowolnych* $g, a_1, \dots, a_k \in \Gamma$, *jeśli istnieje rozwiązanie równania* $\sum_{i=1}^{k} a_i x_i = g$ *w nieujemnych całkowitych* $x_i \leq b_i$, *gdzie* b_i *są całkowite dodatnie, wtedy liczba takich rozwiązań jest co najmniej*

$$3^{1-D(\Gamma)} \prod_{i=1}^{k} (b_i + 1).$$

Współczynnik $3^{1-D(\Gamma)}$ *jest najlepszym możliwym współczynnikiem niezależnym od* a_i, b_i, *a zależnym tylko od* Γ.

[1] M. Zakarczemny, *Number of solutions in a box of a linear homogeneous equation in an Abelian group*, Acta Arith. 155 (2012), pp. 227–231.

[2] M. Zakarczemny, *Number of solutions in a box of a linear equation in an Abelian group*, (to appear).

O QUANDLACH MEDIALNYCH

Anna Zamojska-Dzienio
Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych, Politechnika Warszawska
A.Zamojska-Dzienio@mini.pw.edu.pl

Quandle są algebrami, które pojawiają się w topologii jako niezmienniki węzłów [2]. Dokładniej, *quandlem* $(Q, \cdot)$ nazywamy *idempotentną, lewo-rozdzielną lewą quasigrupę*, czyli algebrę spełniającą dla dowolnych elementów $x, y, z \in Q$ następujące warunki:

- $xx = x$,
- $x(yz) = (xy)(xz)$,
- równanie $xu = y$ ma jednoznaczne rozwiązane $u \in Q$.

Dla dowolnej grupy A, grupoid określony na tym samym zbiorze z operacją sprzężenia jest przykładem quandla. Ogólnie, struktura pewnych quandli jest bardzo ściśle związana z modułami nad przemiennymi pierścieniami.

W naszych badaniach zajęliśmy się *quandlami medialnymi*, czyli spełniającymi dodatkowo równość $(xy)(zt) \approx (xz)(yt)$. Podstawowych przykładów dostarczają quandle *afiniczne* $(A, \cdot)$ skonstruowane z grupy abelowej A z operacją $\cdot$ zdefiniowaną następująco $a \cdot b = (1 - f)(a) + f(b)$, gdzie f jest automorfizmem grupy A. Okazuje się, że takie quandle pełnią postawową rolę w teorii quandli medialnych. Głównym wynikiem w pracy [1] było pokazanie, że każdy quandel medialny jest sumą quandli afinicznych skonstruowaną w pewien określony sposób. Rozkład na sumę otrzymujemy w wyniku działania szczególnej podgrupy grupy automorfizmów quandla medialnego. Co ważne, taką konstrukcję można przeprowadzić w jednoznaczny sposób.

Otrzymane twierdzenie o reprezentacji pozwoliło nam rozwiązać bardzo istotny problem w teorii klasyfikacji quandli skończonych i roztrzygnąć, kiedy dwa quandle medialne są izomorficzne. Dzięki temu mogliśmy opracować skuteczne algorytmy służące do policzenia (nieizomorficznych) quandli medialnych niskich rzędów i poprawić znane wcześniej wyniki. W naszym referacie przedstawimy te rezultaty.

Praca powstała w ramach projektu "Algebra ogólna i zastosowania" w Polsko-Czeskim Programie Wykonawczym na lata 2013-14 (7AMB13PL013 i 8829/R13/R14).

[1] P. Jedlička, A. Pilitowska, D. Stanovský, A. Zamojska-Dzienio, *The structure of medial quandles*, praca przyjęta do druku w Journal of Algebra, dostępna http://arxiv.org/abs/1409.8396.

[2] D. Joyce, *Classifying invariant of knots, the knot quandle*, J. Pure Applied Algebra, **23** (1982), 37–65.

O WYZWANIACH, KTÓRE TOPOLOGIA ALGEBRAICZNA NIETRIANGULOWALNYCH PRZESTRZENI STANOWI DLA ALGEBRY

Andreas Zastrow
Instytut Matematyki, Uniwersytet Gdański
zastrow@mat.ug.edu.pl

Jedną z cech topologii algebraicznej jest to, że po odkryciu grupy podstawowej, pierwsze niezmienniki mierzące przeszkody wyższych wymiarów były grupami homologii symplicjalnej. Prawdopodobnie to miało wpływ na to, jakiego zachowania grup homologii w ogóle oczekiwano; i kiedy 1962 udowodniono przez [1], że dwuwymiarowy metryczny kompleks może mieć niezerowe trzywymiarowe grupy homologii singularne, ten wynik był traktowany jako "nieprawidłowy". Odpowiednio większość wyników topologii algebraicznej jest udowodniona tylko dla przestrzeni spełniających pewne lokalne warunki, których przykład [1] i większość przestrzeni, które dzisiaj nazywamy "fraktalami" nie spełniają. Nazywamy przestrzenie spełniające takie warunki "oswojne" a inne "dzikie". Rozwój topologii algebraicznej unikaj ac dzikich przestrzeni stoi w sprzecznością do rozwoju topologii mnogościowej. Od konstrukcji pierwszych fraktali przez Sierpińskiego, większość wyników jest sformułowana tak, że takie przestrzeni nie są wykluczone z rozpatrywania. Od początku lat 90-tych istnieją pierwsze grupy badawcze, które systematyczne badają też topologię algebraiczną dzikich przestrzeni, a głównym celem jest, żeby pewnego dnia metody topologii algebraicznej były również traktowane jako naturalne źródła badania dzikich przestrzeni. Ponieważ dzikie przestrzenie są lokalnie skomplikowane, o ile już udało się wyliczyć parę z ich algebraicznych niezmienników, to często otrzymujemy grupy, które są trudne do zrozumienia. Konkretnym celem tego referatu będzie przedstawienie paru wyników tej dziedziny topologii (nie tylko własne, ale między innymi [2–5]), mniej pod tymi aspektami, jak one były osiągnięte, ale raczej pod tym aspektem, jakie wyzwania w tym kontekście występujące algebraiczne niezmienniki mogą również stanowić dla czystych algebraików.

[1] M. G. Barratt, J. Milnor, *An example of anomalous singular homology*, Proc. Amer. Math. Soc., **13** (1962), 293–297.

[2] H. Fischer, A. Zastrow, *Combinatorial $\mathbb{R}$-trees as generalized Cayley-Graphs for fundamental groups of one-dimensional spaces*, Geom. Dedicata, **163** (2013), 19–43.

[3] O. Bogopolski, A. Zastrow, *The word problem for some uncountable groups given by countable words*, Topology Appl., **159**, no. 3, 569–586.

[4] H. Fischer, A. Zastrow, *Word calculus in the fundamental group of the Menger Cube*, preprint, złożony.

[5] O. Bogopolski, A. Zastrow, *An uncountable homology group, where each element is an infinite product of commutators*, preprint, złożony.

PIERŚCIENIE I CIAŁA STAŁYCH RÓŻNICZKOWAŃ FAKTORYZOWALNYCH CYKLICZNYCH

Janusz Zieliński
Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Mikołaja Kopernika
ubukrool@mat.uni.torun.pl

Podajemy opis pierścieni i ciał stałych pewnych rodzin różniczkowań faktoryzowalnych cyklicznych. Tym samym wyznaczamy także wszystkie wielomianowe oraz będące funkcjami wymiernymi całki pierwsze odpowiadających im układów równań różniczkowych. Przykładami różniczkowań faktoryzowalnych cyklicznych są różniczkowania Volterry oraz Lotki–Volterry, które odgrywają znaczącą rolę w biologii populacyjnej, fizyce laserowej oraz fizyce plazmy. Różniczkowania faktoryzowalne są ważną częścią teorii różniczkowań, ponieważ możemy stowarzyszyć różniczkowanie tego typu z dowolnym różniczkowaniem pierścienia wielomianów. Konstrukcja ta pomaga wyznaczyć stałe tego dowolnego różniczkowania. Ponadto podajemy postać kofaktorów istotnych wielomianów Darboux różniczkowań Lotki-Volterry. Wszystkie rozważania przeprowadzane są nad dowolnym ciałem charakterystyki zero.

[1] A. Nowicki, J. Zieliński, *Rational constants of monomial derivations*, Journal of Algebra. **302** (2006), 387-418.

[2] P. Ossowski, J. Zieliński, *Polynomial algebra of constants of the four variable Lotka-Volterra system*, Colloquium Mathematicum. **120** (2010), 299-309.

[3] J. Zieliński, *The five-variable Volterra system*, Central European Journal of Mathematics. **9** (2011), 888-896.

[4] J. Zieliński, P. Ossowski, *Rings of constants of generic 4D Lotka-Volterra systems*, Czechoslovak Mathematical Journal. **63** (2013), 529-538.

[5] J. Zieliński, *Rings of constants of four-variable Lotka-Volterra systems*, Central European Journal of Mathematics. **11** (2013) 1923-1931.

[6] J. Zieliński, *Rational constants of generic LV derivations and of monomial derivations*, Bulletin of the Polish Academy of Sciences. Mathematics. **61** (2013) 201-208.

[7] J. Zieliński, *The field of rational constants of the Volterra derivation*, Proceedings of the Estonian Academy of Sciences. **63** (2014) 133-135.

[8] J. Zieliński, *Fields of rational constants of LV derivations*, preprint.

[9] P. Hegedűs, J. Zieliński, *The constants of the Lotka-Volterra derivations*, preprint.

SŁABE AUTOMORFIZMY GRUP

Marek Żabka
Instytut Matematyki, Politechnika Śląska
marek.zabka@polsl.pl

Dla danej grupy $(G, \circ)$, przez słaby automorfizm rozumiemy odwzorowanie $\varphi : G \to G$ takie, że $\varphi(x \circ y) = \varphi(x) \Box \varphi(y)$, dla pewnego działania $\Box$ grupowego zdefiniowanego słowem w grupie G. Oczywistym przykładem takiego słabego automorfizmy jest każdy anty-automorfizm, a w szczególności odwzorowanie $G \ni x \to x^{-1} \in G$. W grupa wolnych nie ma innych słabych automorfizmów. W [1] autorzy opisali słabe automorfizmy dla grup nilpotentnych stopnia 2. Dla grup o skończonym wykładniku, a w szczególności w grupach skończonych, przykładami słabych automorfizmów są odwzorowania postaci $G \ni x \to (\alpha(x))^m \in G$, dla liczb m względnie pierwszych z eksponentem grupy oraz dowolnego automorfizmu α ([2]). Dla wielu grup nie ma innych słabych automorfizmów, w szczególności dla grup o rzędzie pq dla różnych liczb pierwszych p oraz q, dla skończonych grup diedralnych ([4]), dla grup symetrycznych ([3]) oraz ogólniej, dla skończonych grup Coxetera oraz pewnych ich uogólnień.

[1] A. Hulanicki, S. Świerczkowski, *On group operations other then xy or yx*, Publ.Math. Debrecen. **9** (1962), 142—148.

[2] A. Solecki, *On group operations in groups of exponent k*, Colloq. Math. **30** (1974), 2525–228.

[3] M. Żabka, *Weak automorphisms of permutation groups S_n*, Publ.Math. Debrecen. **43** (1994), 1–8

[4] E. Płonka, *Weak automorphisms of dihedral groups* Algebra Univers. **64** (2010), 153–160